

# FISICA

*Problemas*

Fascículo  
**2**  
CONTIENE

## ANÁLISIS VECTORIAL

- ➔ Descomposición Rectangular
- ➔ Operaciones Vectoriales
- ➔ VECTORES UNITARIOS

Editorial  
**CUZCAN** UNI  
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

EFRAÍN TARAZONA T.

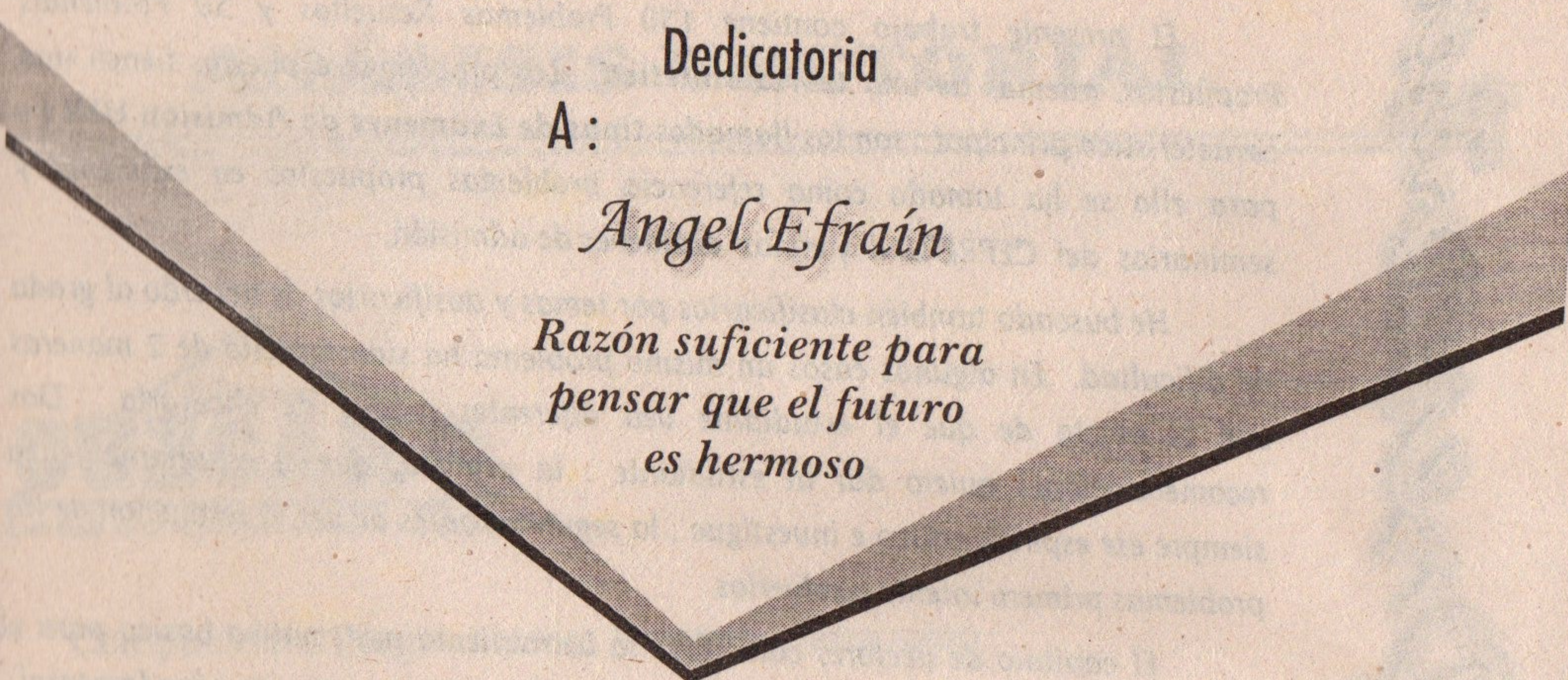


NO TE OLVIDES DE SUSCRIBIRTE!!!

<https://www.youtube.com/channel/UCCJZe8IVDn1hQPS400g725g>

UNETE AL GRUPO DE FACEBOOK!!!

<https://www.facebook.com/groups/928476563896833/>



LIKE PARA CONOCER TODOS LOS LIBROS GRATIS!!!

<https://www.facebook.com/LibrosGratisPDFyDOC/>



## INDICE

### ANÁLISIS VECTORIAL



#### VECTOR

	Pág
♦ Definición .....	7
♦ Propiedades y características .....	8
♦ Descomposición rectangular de un vector .....	10
♦ Operaciones con vectores paralelos .....	11
♦ Problemas de aplicación .....	13
♦ Resultante de vectores no paralelos (regla del paralelogramo, vector diferencia) .....	37
♦ Problemas de aplicación .....	38



#### VECTOR UNITARIO

♦ Representación cartesiana del vector .....	42
♦ Suma y diferencia de vectores (en forma cartesiana) .....	44
♦ Problemas de aplicación .....	47
♦ Producto escalar .....	48
♦ Producto vectorial .....	97
♦ Problemas de aplicación .....	98
♦ Problemas de aplicación .....	100



#### Miscelánea



#### Problemas propuestos



#### Claves

106

119

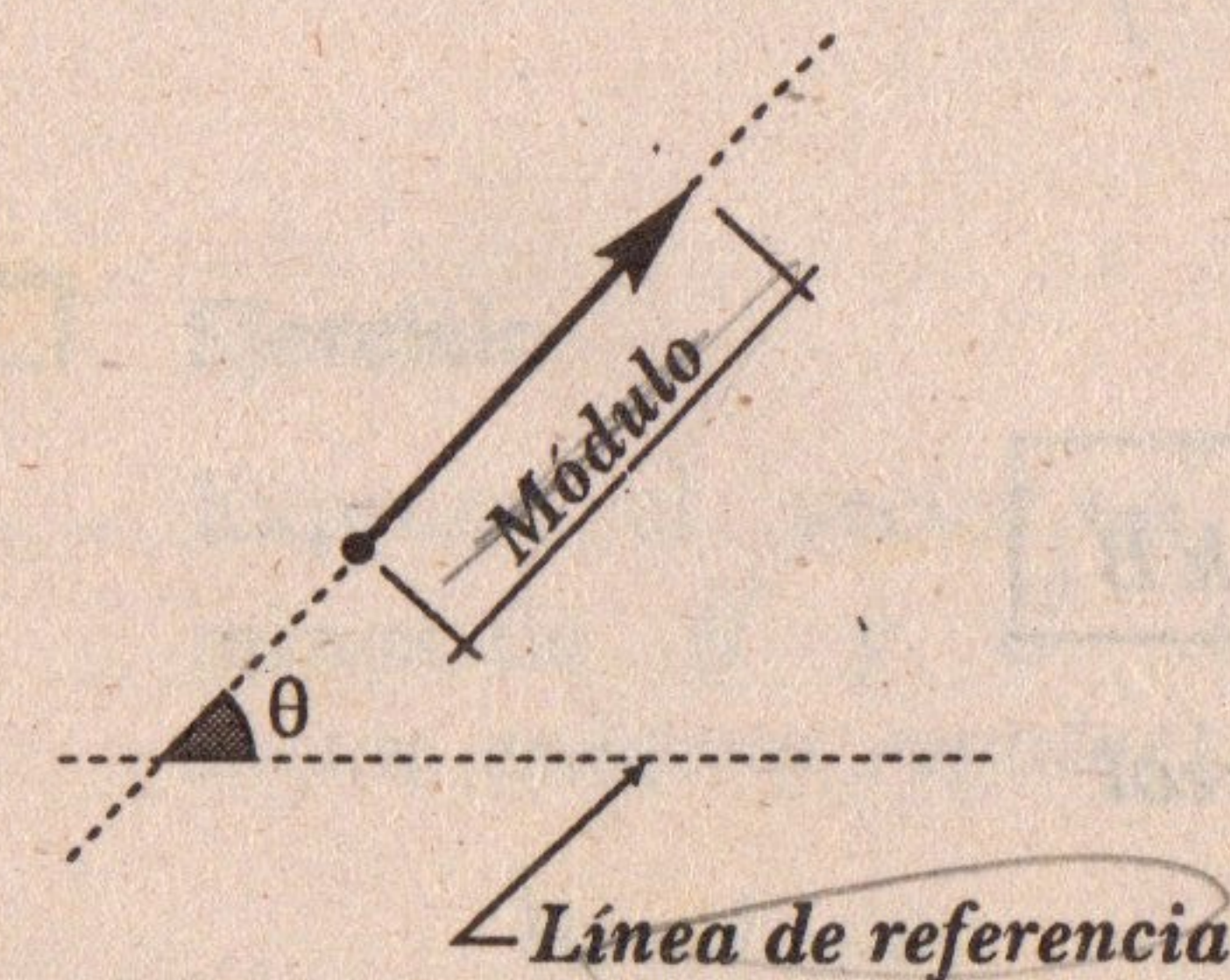
128



# ANÁLISIS VECTORIAL

## VECTOR

Modelo matemático usado para representar a las magnitudes vectoriales.



### Elementos Básicos

- \* Módulo
- \* Dirección

### Notaciones :

- \*  $\vec{A}$  : Vector "A"
- \*  $|\vec{A}| = |A| = A$  : módulo del vector "A"
- \*  $\theta$  : Dirección del vector

### Nota:

$$\vec{A} \neq A$$

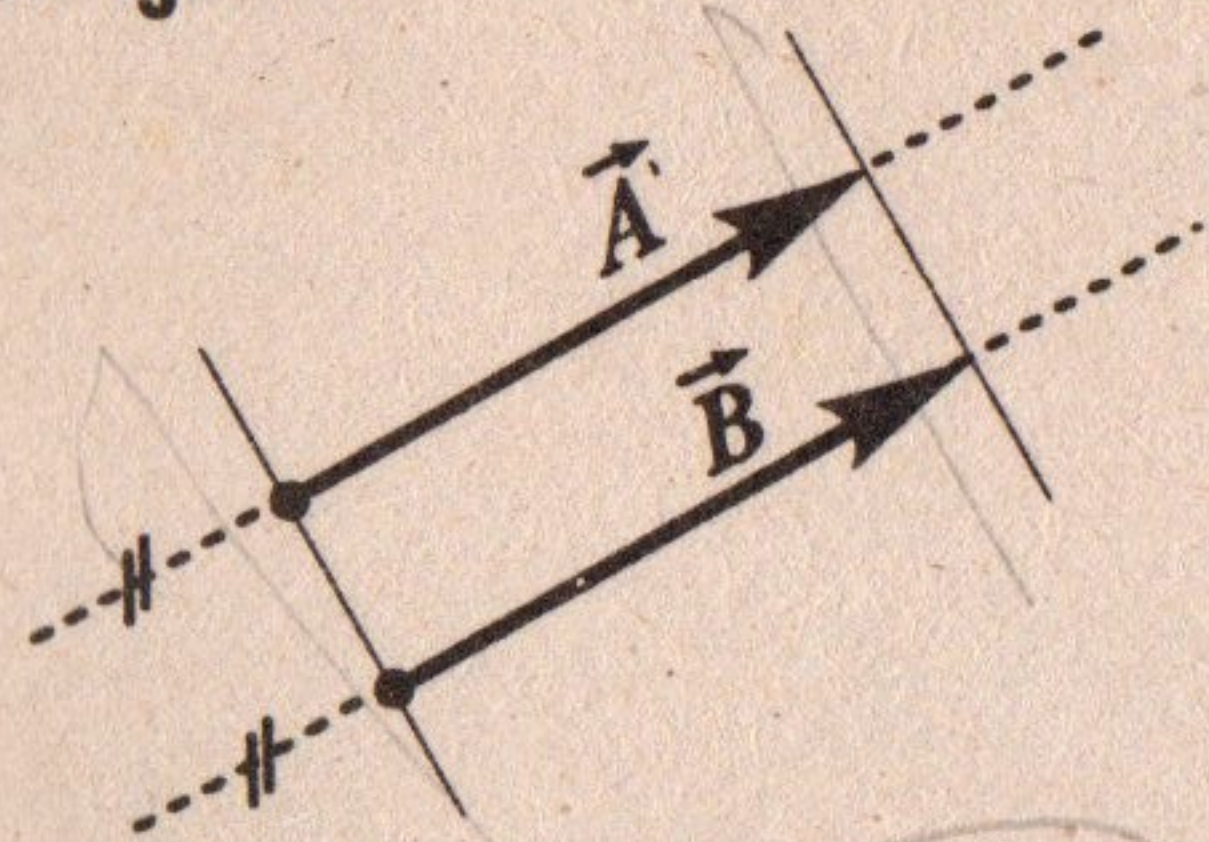
Indica módulo

Indica módulo y dirección



## PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS

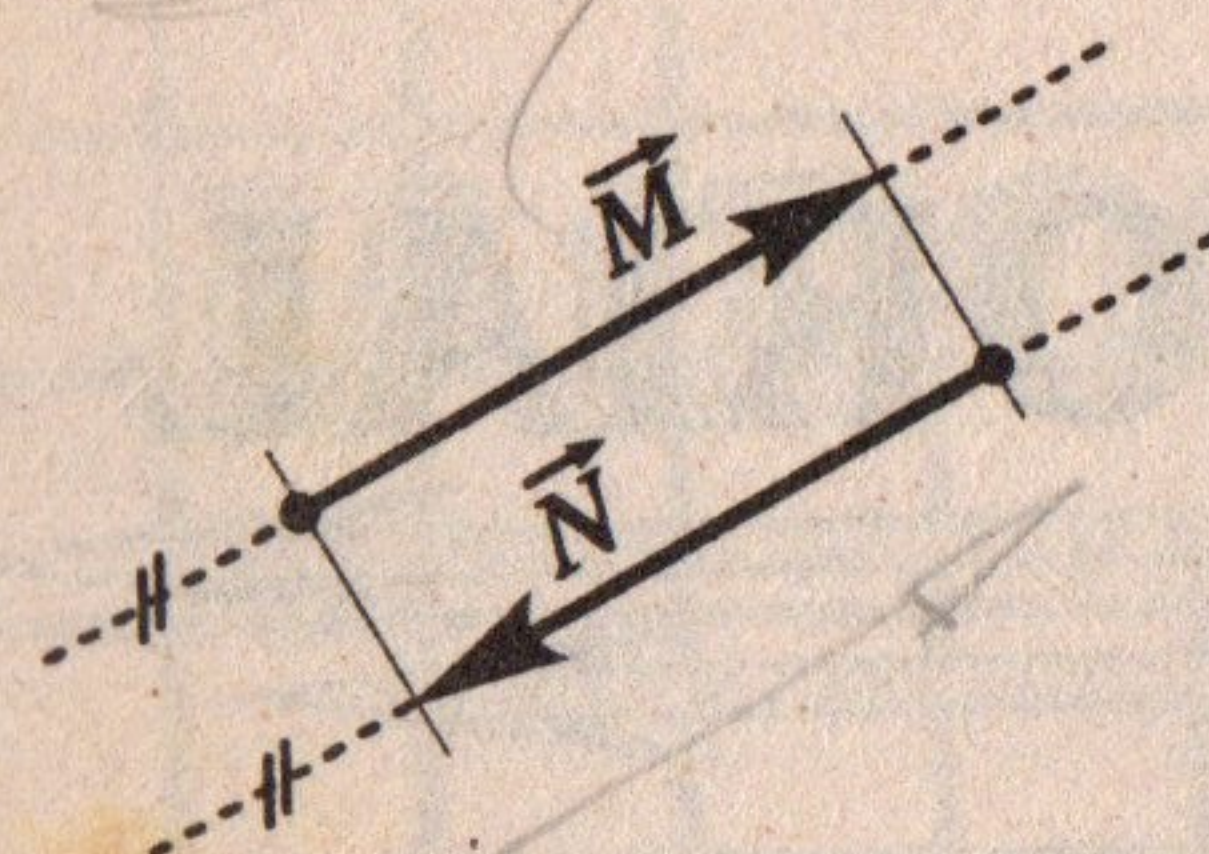
## 1 Vectores Iguales



Si  $\vec{A} = \vec{B}$  ; entonces tienen :

- \* Igual módulo.
- \* Igual dirección.

## 2 Vectores Opuestos de Igual Módulo (Vector Negativo)



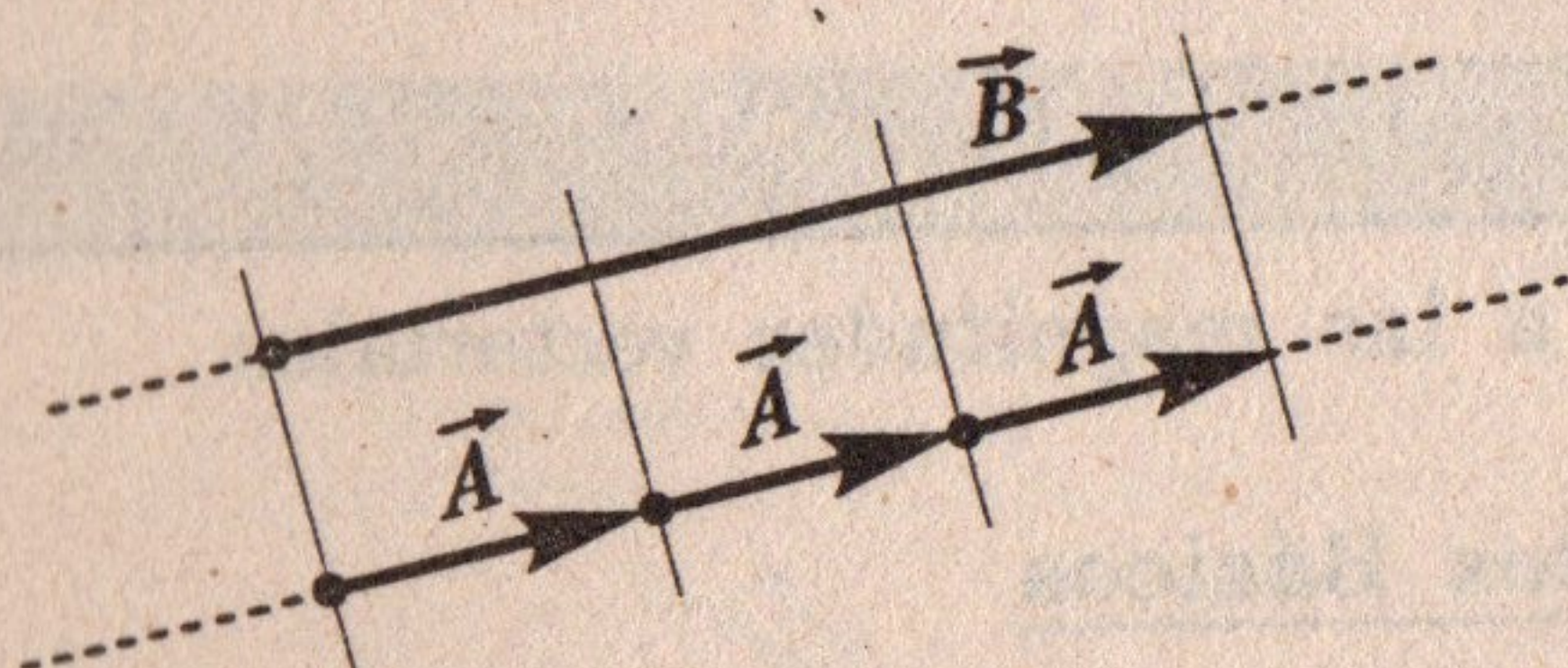
$$\vec{M} = -\vec{N}$$

$$\vec{M} + \vec{N} = \vec{0}$$

$$|\vec{M}| = |-\vec{N}|$$

También :  $\vec{M}$  es el antiparalelo de  $\vec{N}$ .

## 3 Relación entre 2 vectores paralelos.



En la figura :

$$\vec{B} = 3\vec{A}$$

$$\vec{A} = \left(\frac{1}{3}\right)\vec{B}$$

En general :

$$\text{Si } \vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = k\vec{B}$$

$k \# \text{ real}$

Si :

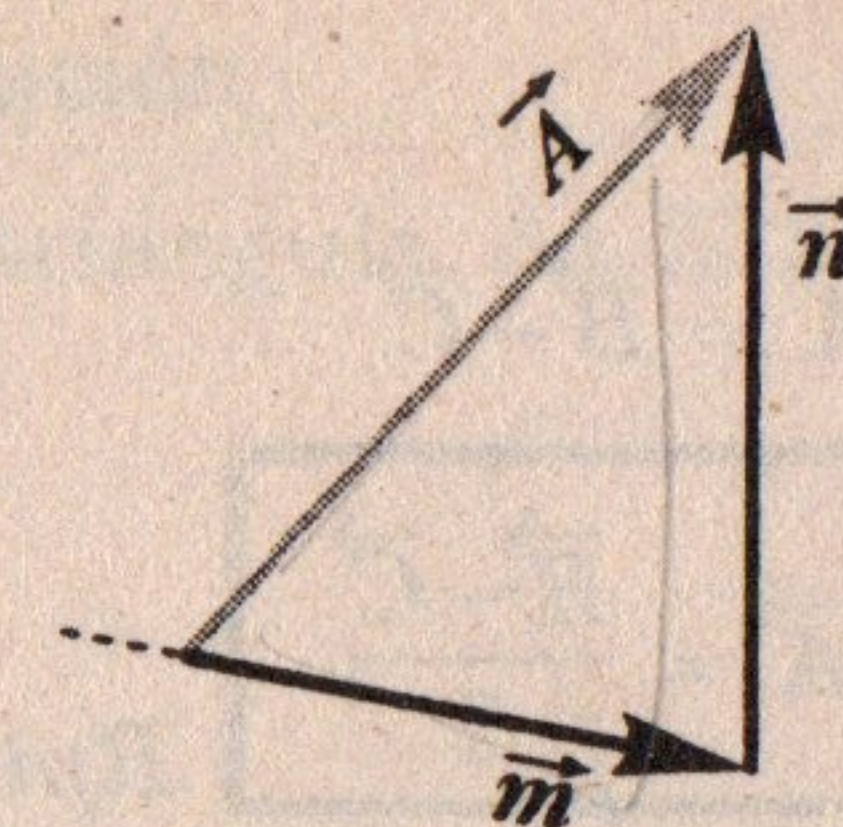
$k > 0$  ... misma dirección

$k < 0$  ... dirección opuesta

## 4 Todo vector puede ser descompuesto y graficado como vectores uno a continuación del otro.

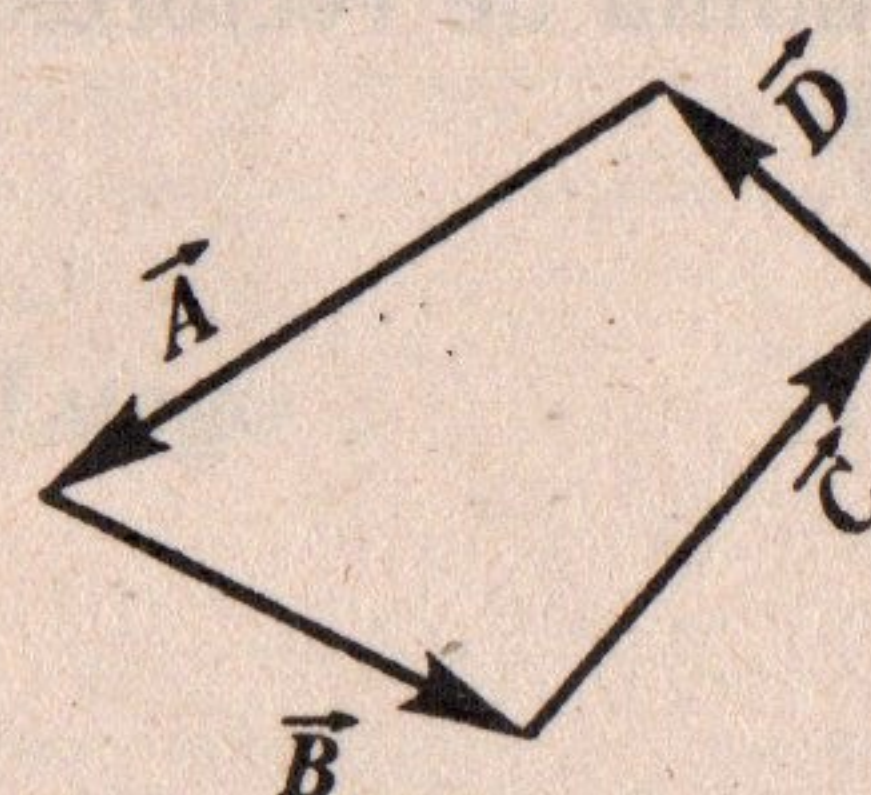
Así :

a)

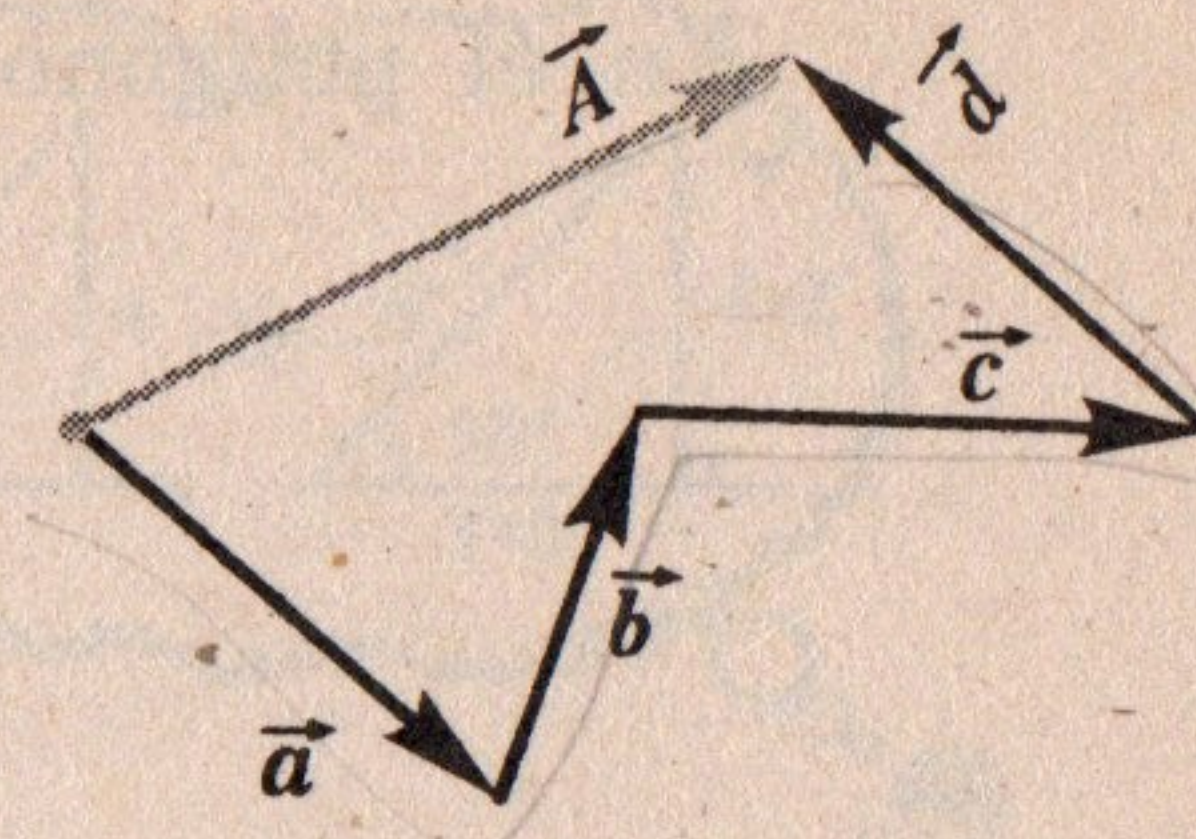


$$\vec{A} = \vec{m} + \vec{n}$$

También :



b)



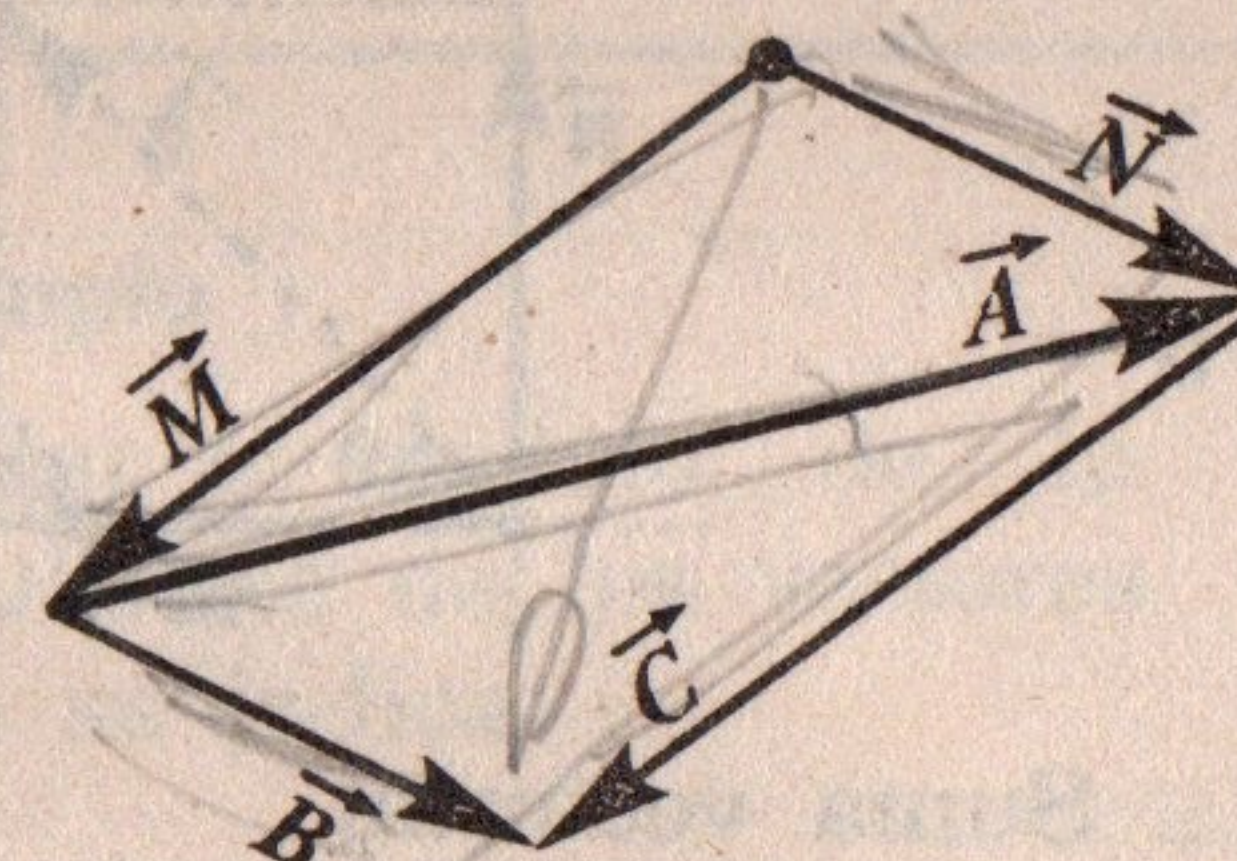
$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$$

(polígono cerrado)

Ejemplo :

En el gráfico :



Se cumple :

$$\vec{N} = \vec{M} + \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$$

$$\vec{M} + \vec{B} = \vec{N} + \vec{C}$$

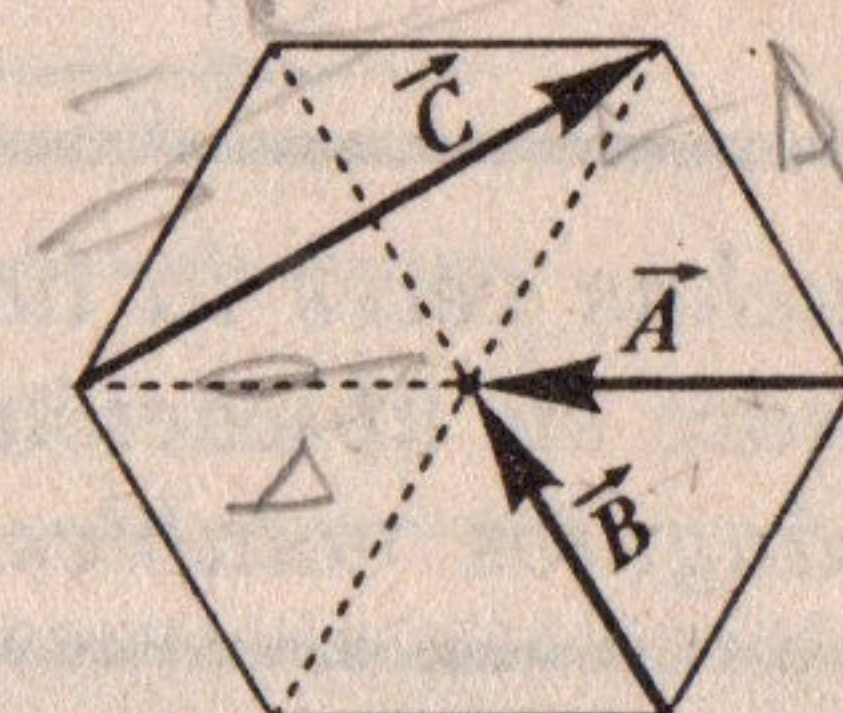
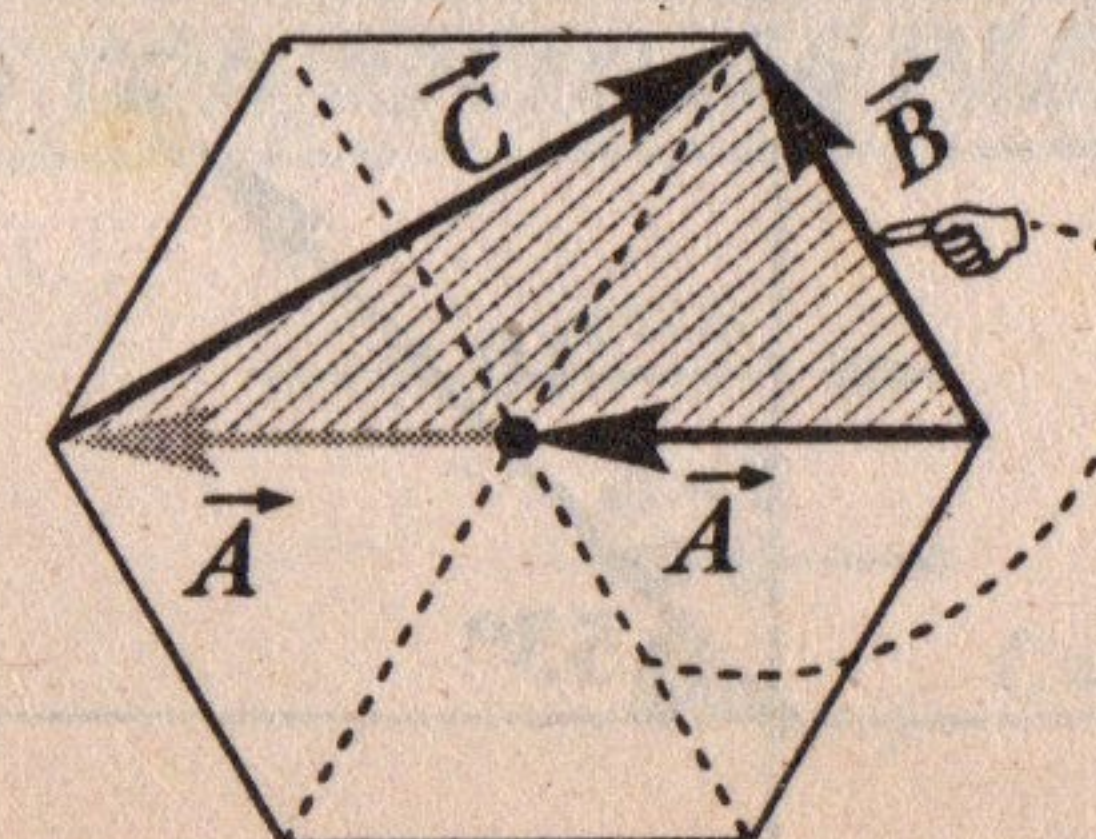
$$\vec{A} = -\vec{M} + \vec{N}$$

$$\vec{M} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{N} = \vec{0}$$

## Ejercicio

Expresa el vector  $\vec{A}$  en términos de  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  (la figura es un exágono regular).

Resolución



- Usando las propiedades buscamos formar el polígono cerrado.
- $\vec{B}$  : fué trasladado.
- Se aumentó otro vector  $\vec{A}$ .



En el polígono sombreado :

$$\vec{B} = 2\vec{A} + \vec{C} \Rightarrow 2\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

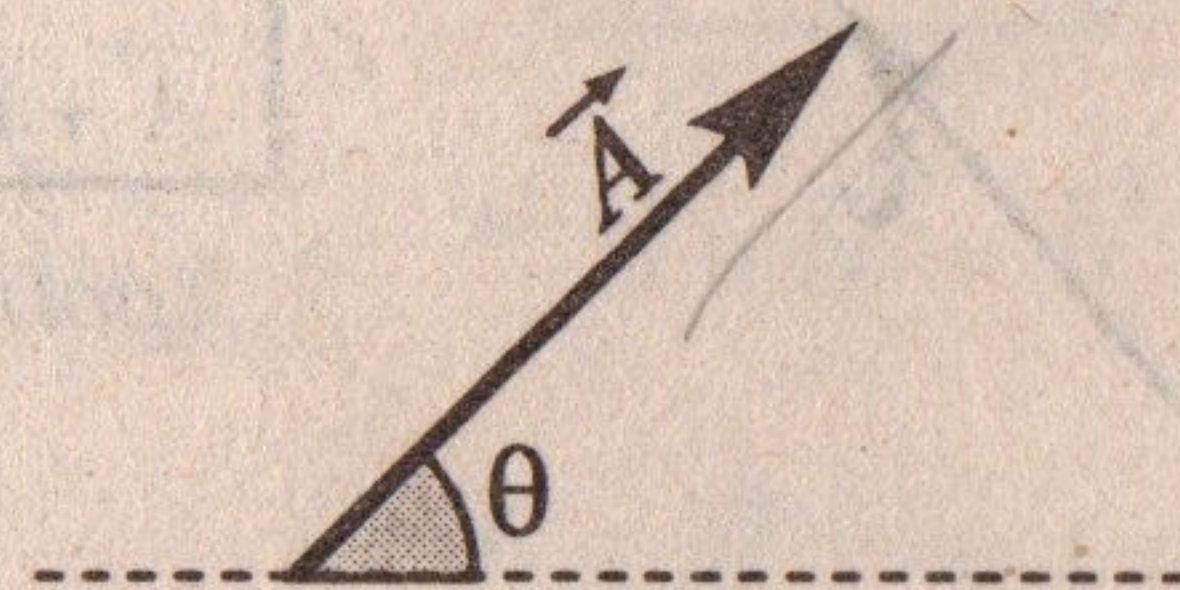
$$\therefore \vec{A} = \frac{\vec{B} - \vec{C}}{2} \quad \text{Rpta.}$$

## DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

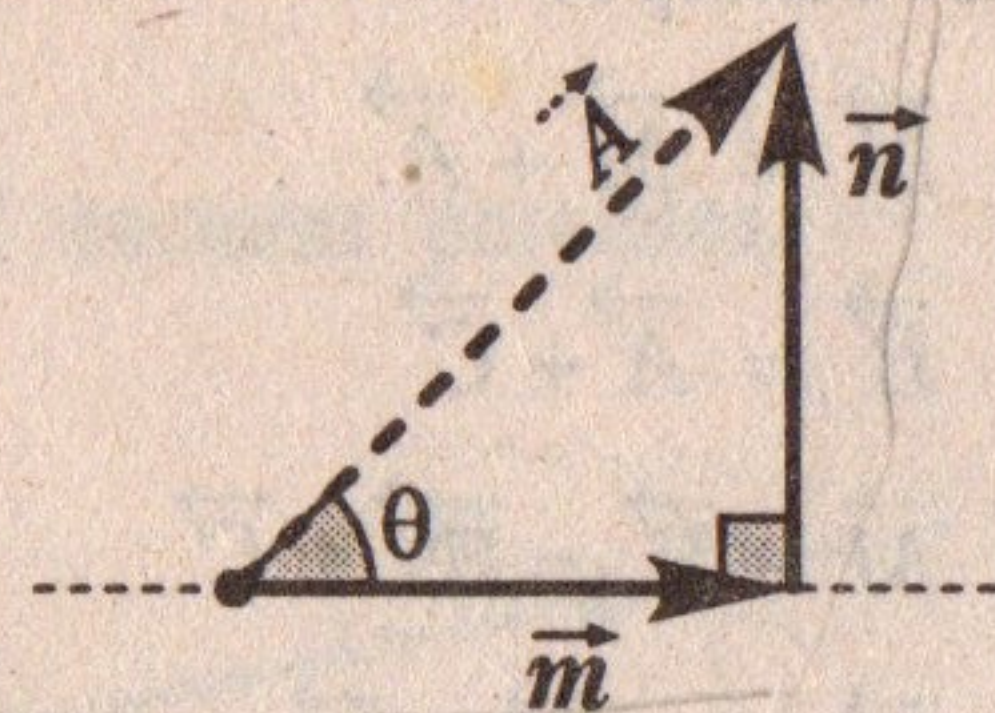
Se llama así cuando el vector está expresado como suma de vectores perpendiculares.

Ejemplo

Sea :



Se puede expresar como



$$\vec{A} = \vec{m} + \vec{n}$$

$$A = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$m = A \cos \theta$$

$$n = A \sin \theta$$

..... Suma vectorial

..... Módulo de  $\vec{A}$

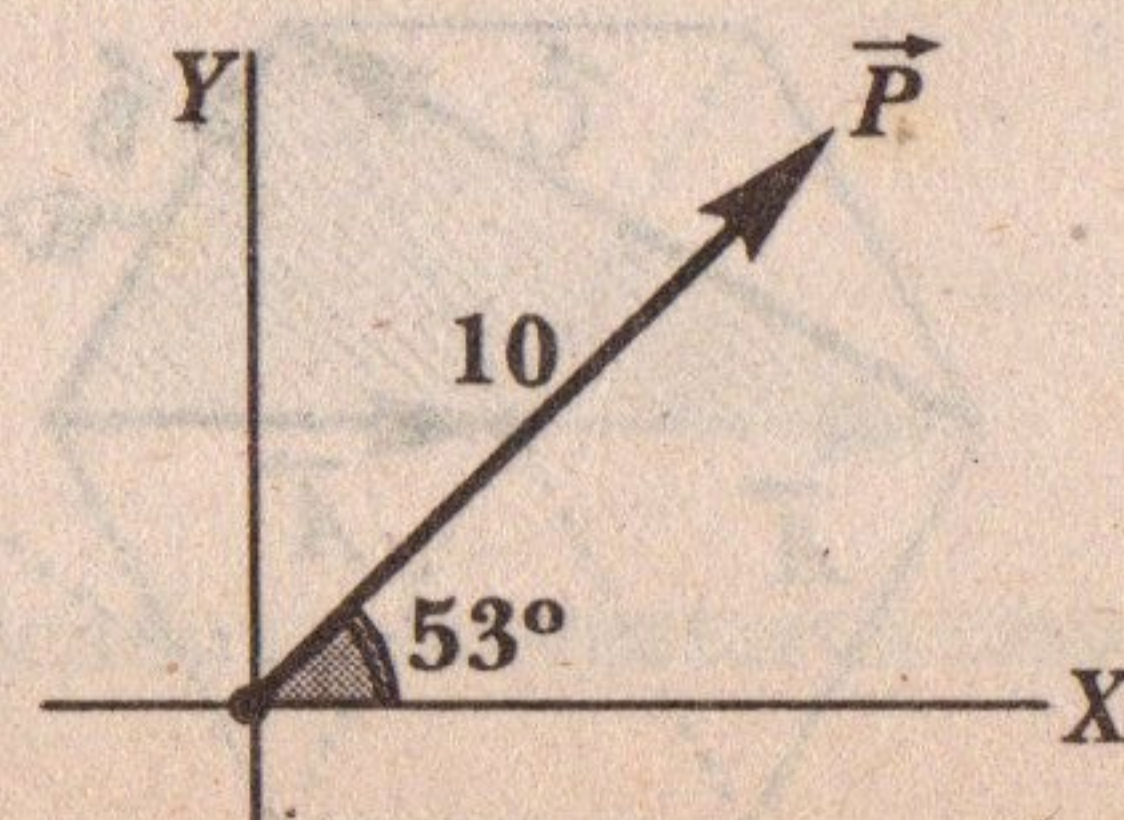
..... Valor de las componentes

Nota:

Muchas veces la descomposición de un vector se consigue fácilmente si se conoce su ubicación en el plano cartesiano o teniendo presente la teoría de triángulos notables.

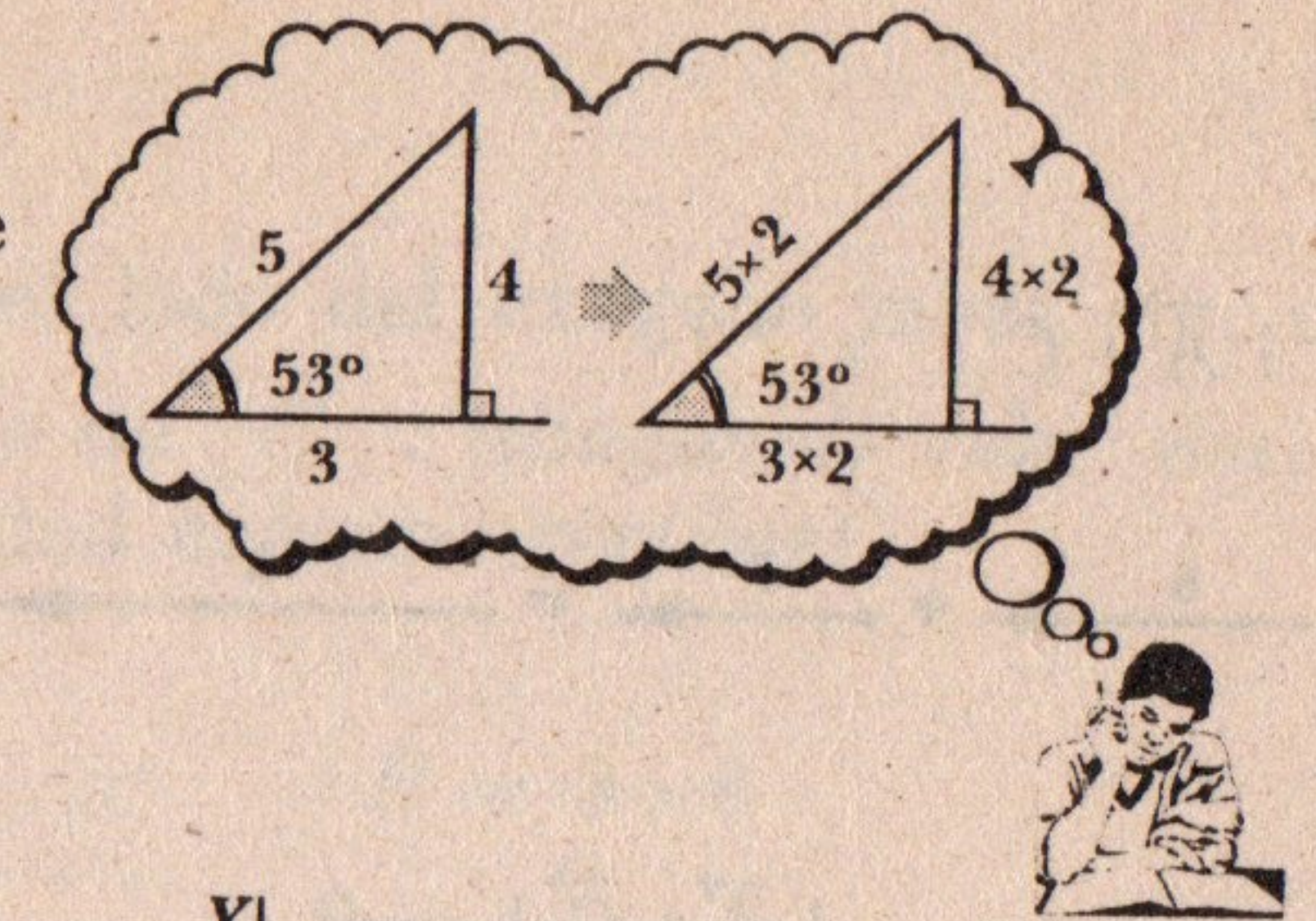
☐ Ejercicio

Descomponer el vector en los ejes cartesianos e indicar el valor de cada componente.

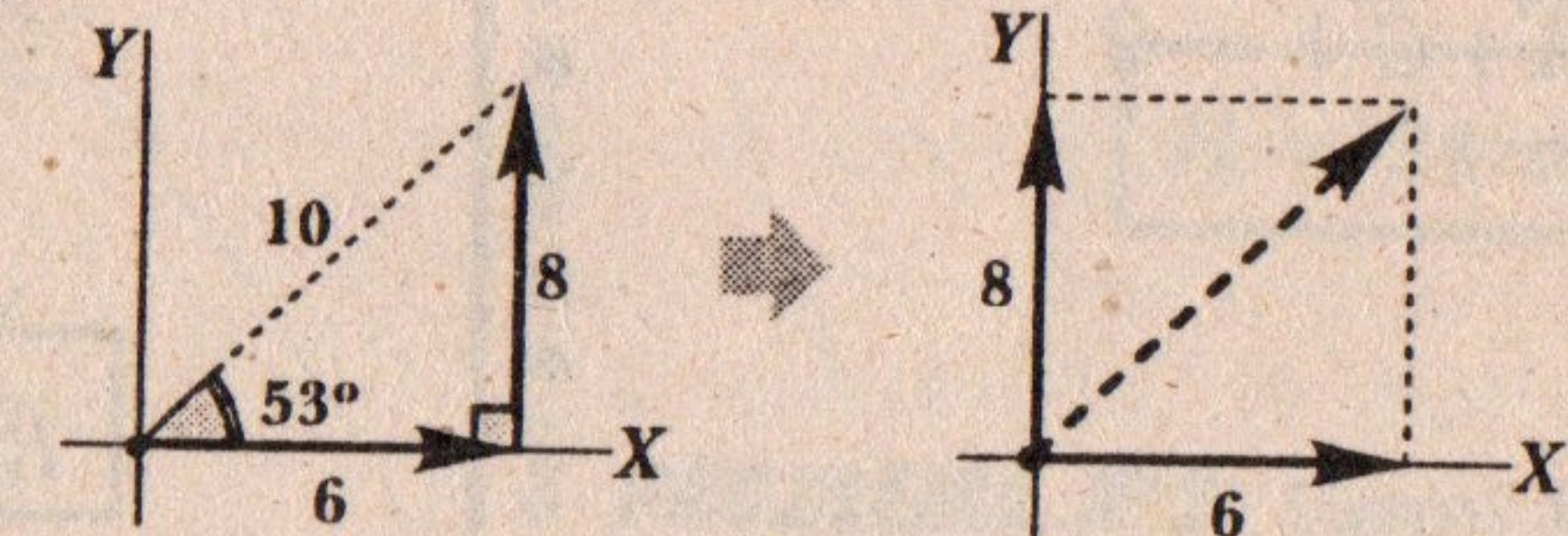


**Solución**

El triángulo de  $53^\circ$  es notable



En el ejercicio



Luego :

$$P_x = 6$$

$$P_y = 8$$

Rpta.

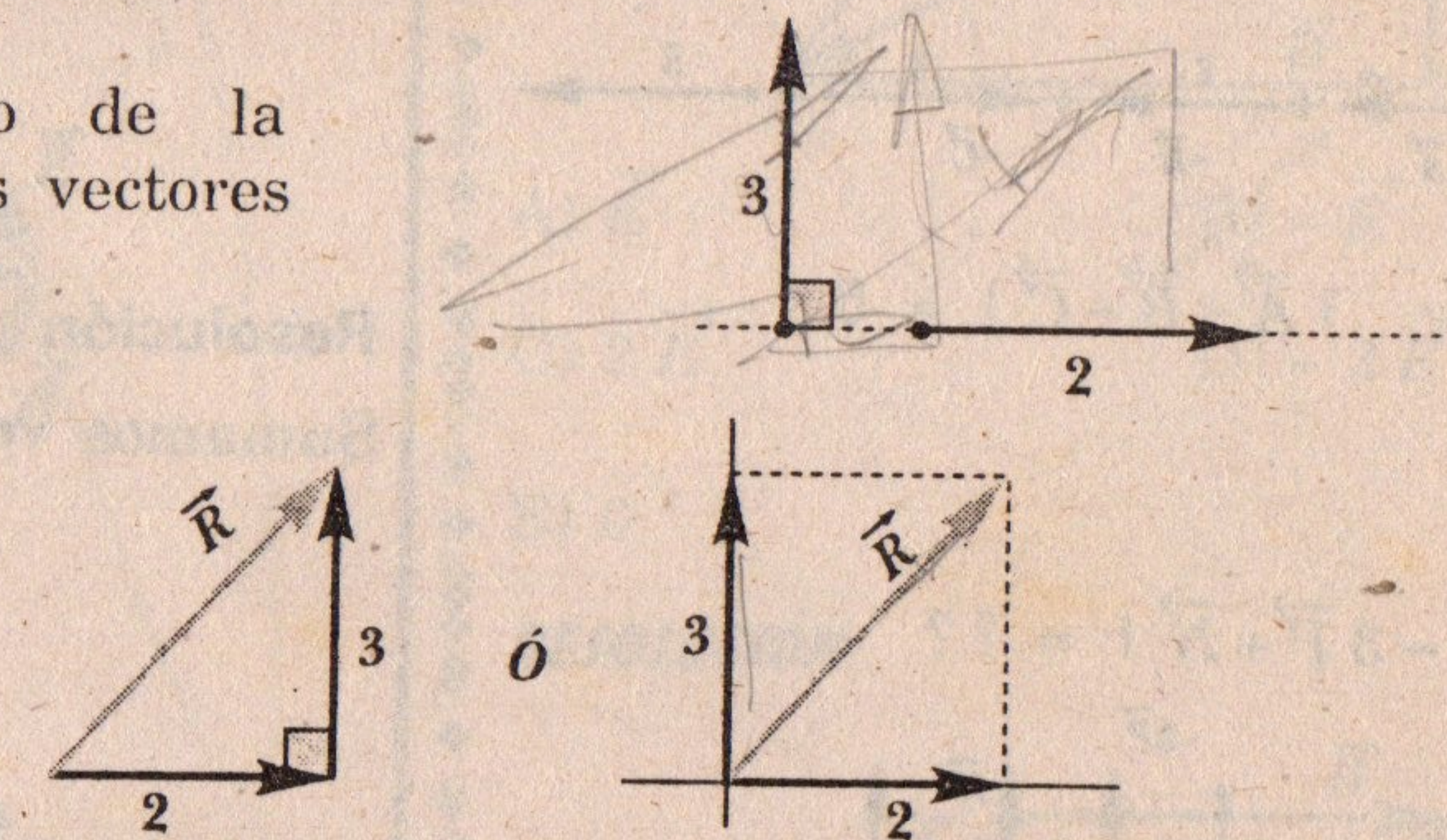
Observación

Podríamos decir también : teniendo 2 vectores perpendiculares (ortogonales), el módulo de la resultante se calcula por el teorema de Pitágoras.

Ejemplo :

Hallar el módulo de la resultante de los vectores que se indica.

**Solución**



$$R = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

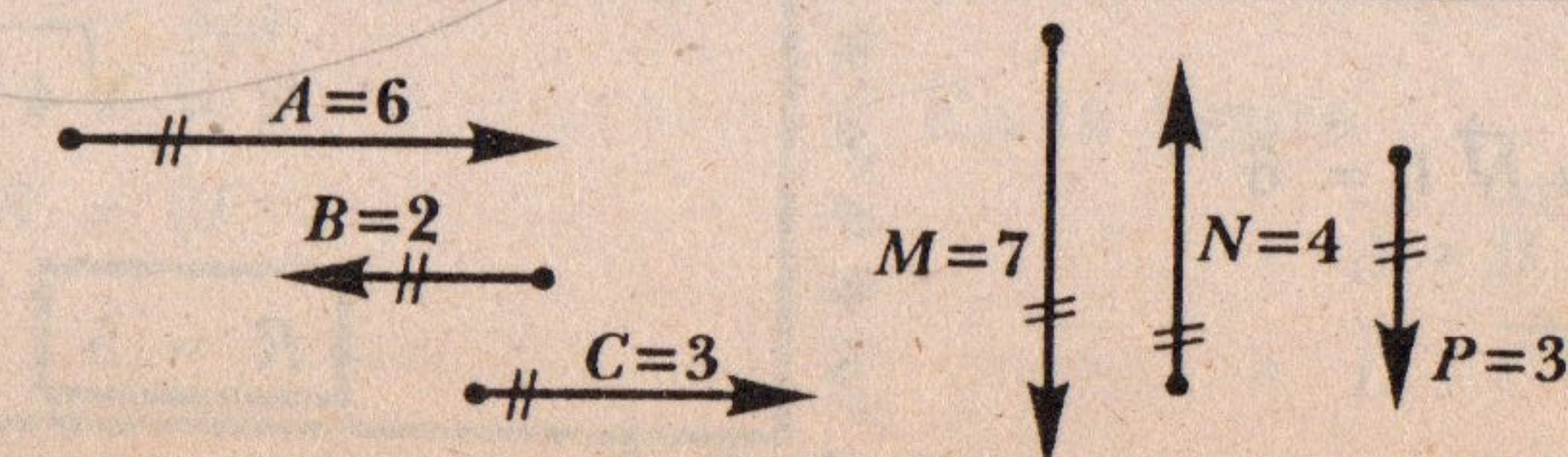
$\therefore$

$$R = \sqrt{13}$$

Rpta.

## OPERACIONES CON VECTORES PARALELOS

Sean :





Luego :

a.  $|\vec{A} + \vec{C}| = ??$

$$\begin{array}{c} 6 \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} 9 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{C}| = 9$$

b.  $|\vec{A} + \vec{B}| = ??$

$$\begin{array}{c} 6 \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = 4$$

c.  $|\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}| = ??$

$$\begin{array}{c} 6 \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \leftarrow \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} 5 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\therefore |\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}| = 5$$

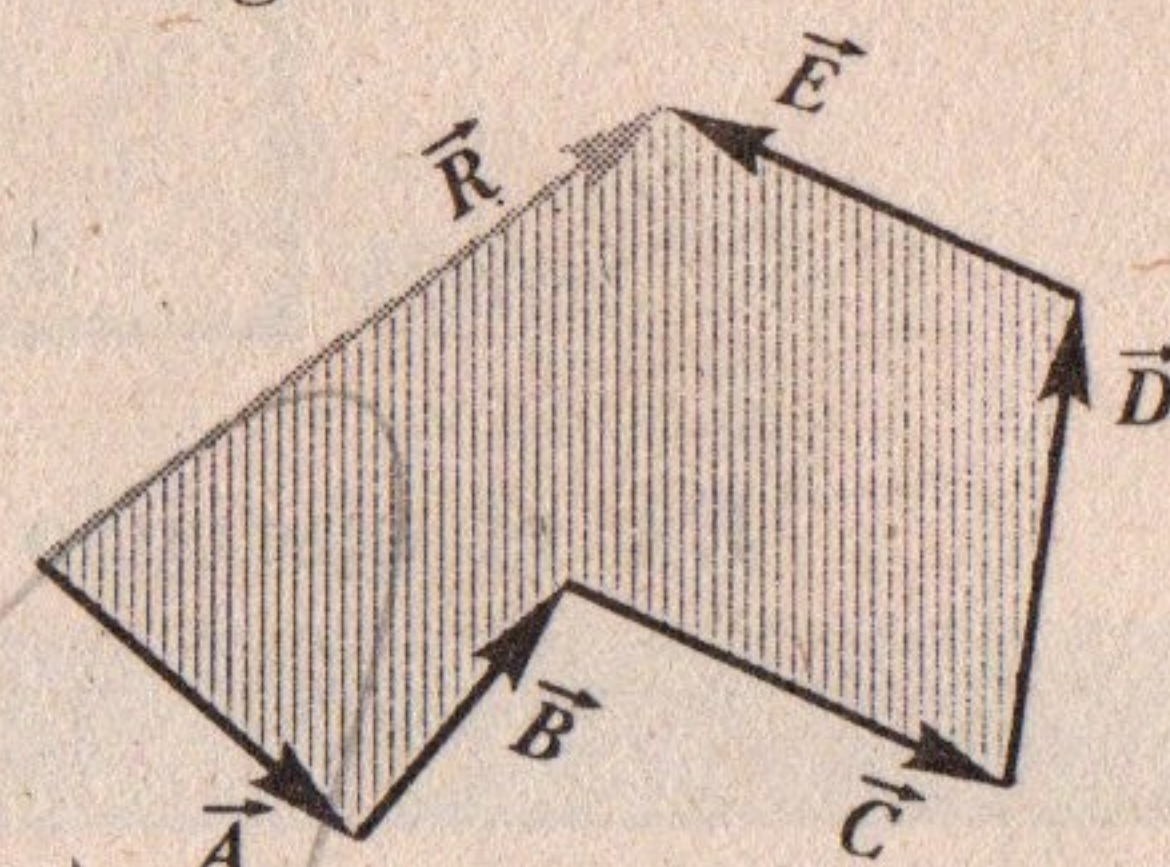
d.  $|\vec{M} - 3\vec{P} + \vec{N}| = ??$

$$\begin{array}{c} 7 \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} 9 \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ \uparrow \end{array}$$

$$\therefore |\vec{M} - 3\vec{P} + \vec{N}| = 6$$

### Observación

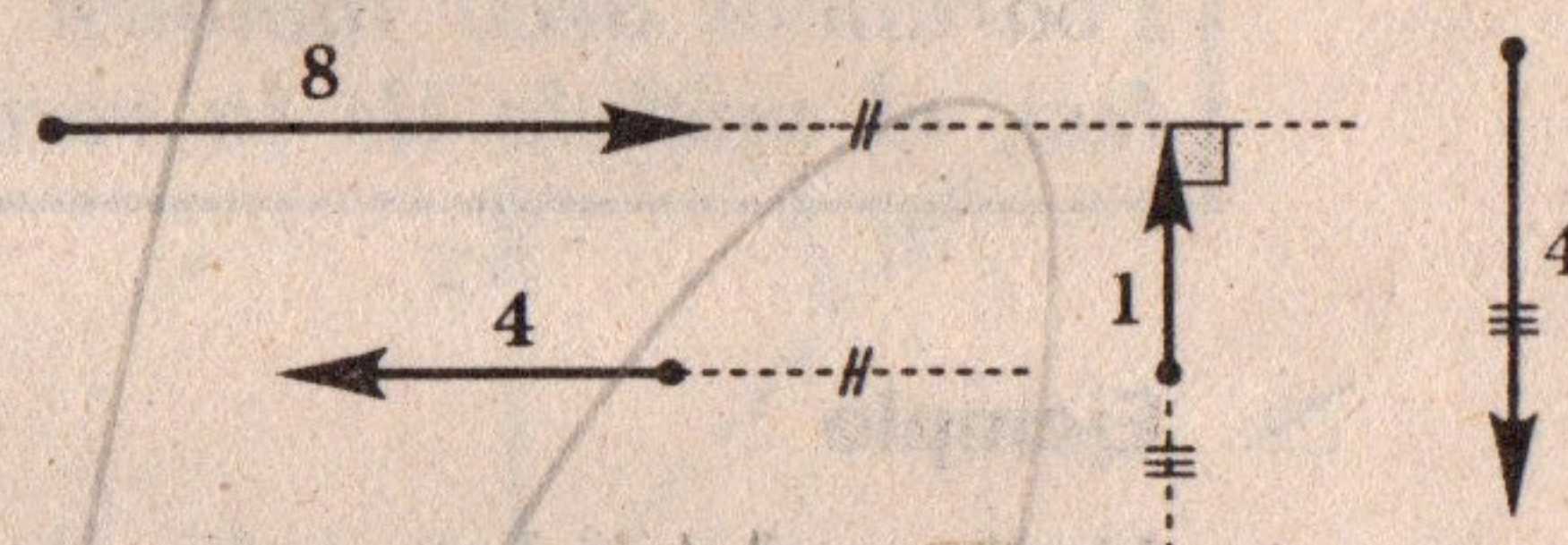
1 En la figura :



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$

( $\vec{R}$  : Resultante Vectorial)

2 La resultante del sistema de vectores (según las propiedades aprendidas).

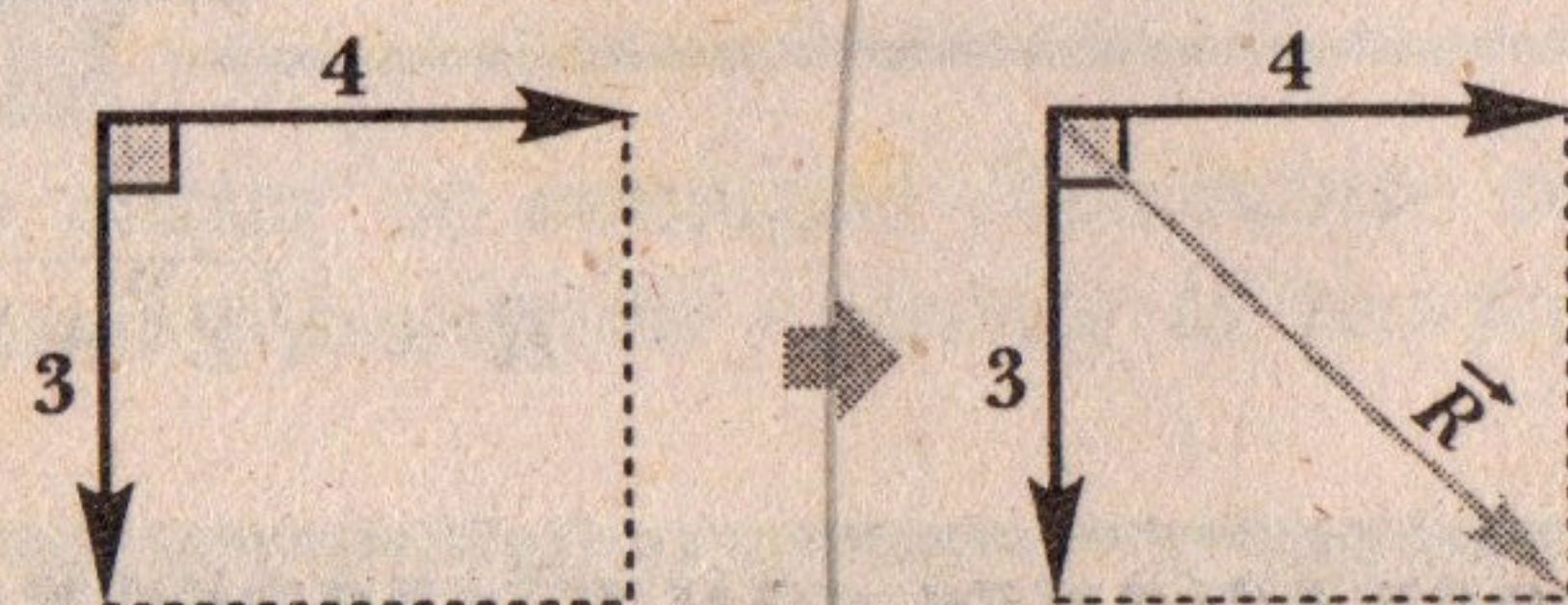


### Resolución

Sumamos vectores paralelos y quedará.

$$* 8 - 4 = 4$$

$$* 4 - 1 = 3$$

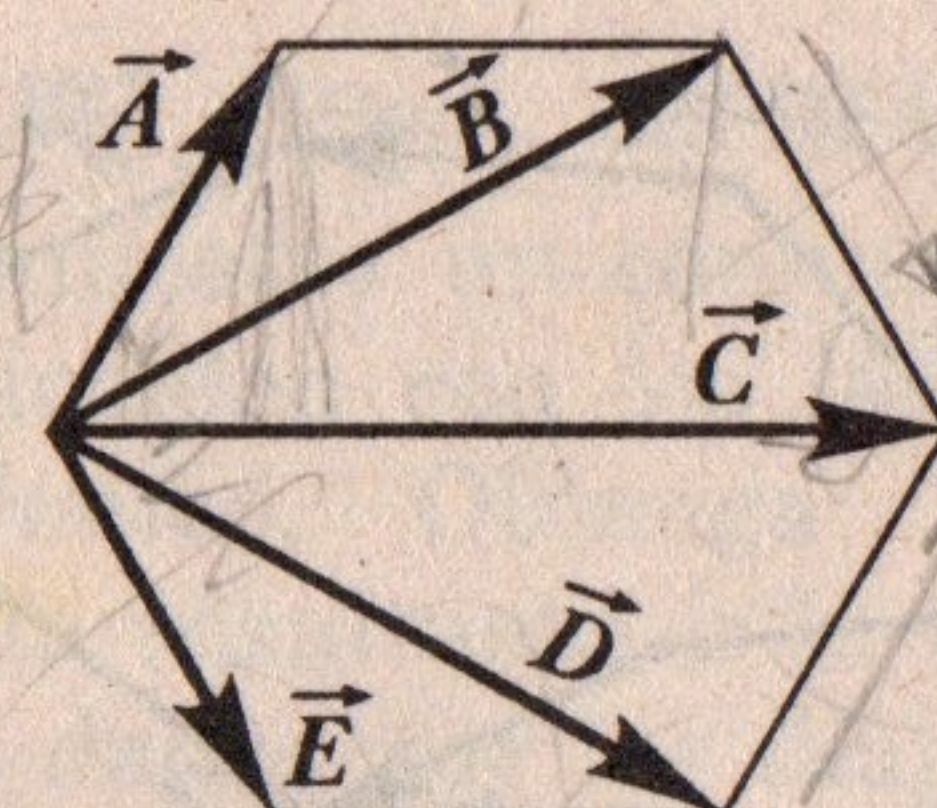


$$R = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$\therefore R = 5 \text{ Rpta.}$$

### PROBLEMA N°1 (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

En el sistema de vectores sobre el exágono de  $4m$  de lado mostrado en la figura, determine el módulo de la resultante.



A)  $20m$

B)  $16m$

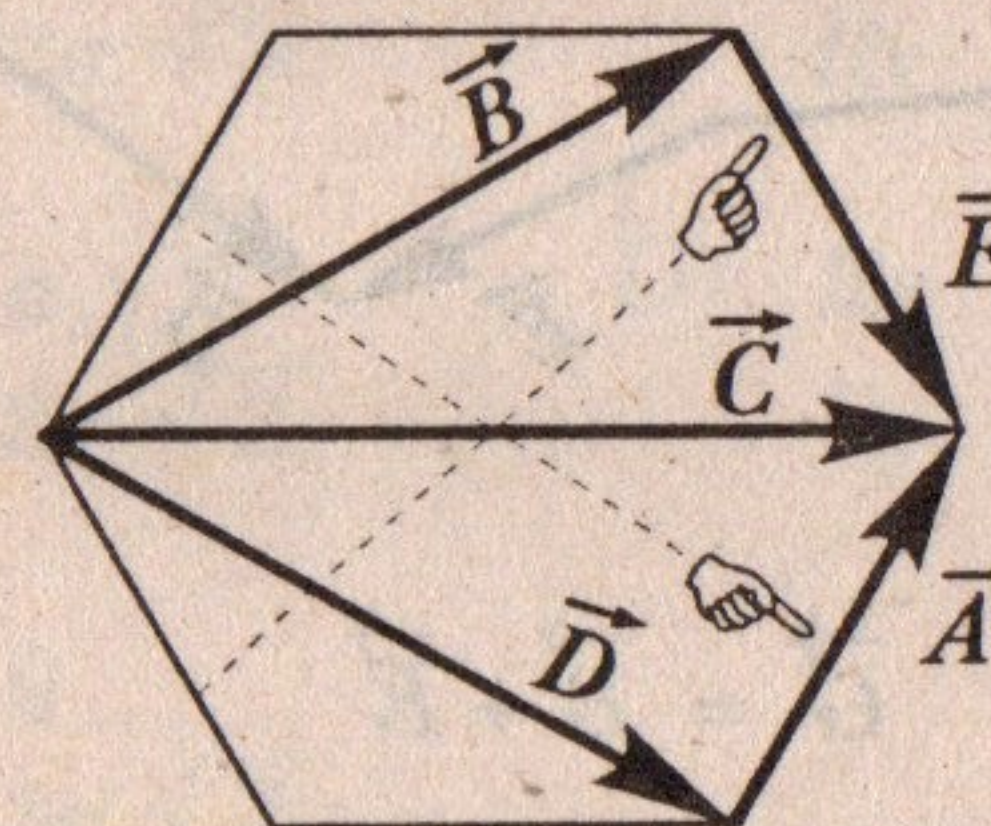
C)  $24m$

D)  $8m$

E)  $32m$

### RESOLUCIÓN

Trasladamos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{E}$  sobre direcciones paralelas.



$$* \vec{B} + \vec{E} = \vec{C}$$

$$* \vec{D} + \vec{A} = \vec{C}$$

Notamos :

La resultante pedida es :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{C} + \vec{C} + \vec{C}$$

$$\vec{R} = 3\vec{C} \Rightarrow R = 3C$$

### PROBLEMAS RESUELTOS

Si el lado del exágono mide  $4m$ , el módulo de  $\vec{C}$  : (diagonal) vale  $8m$  (propiedad exágono regular).

$$R = 3 \times 8$$

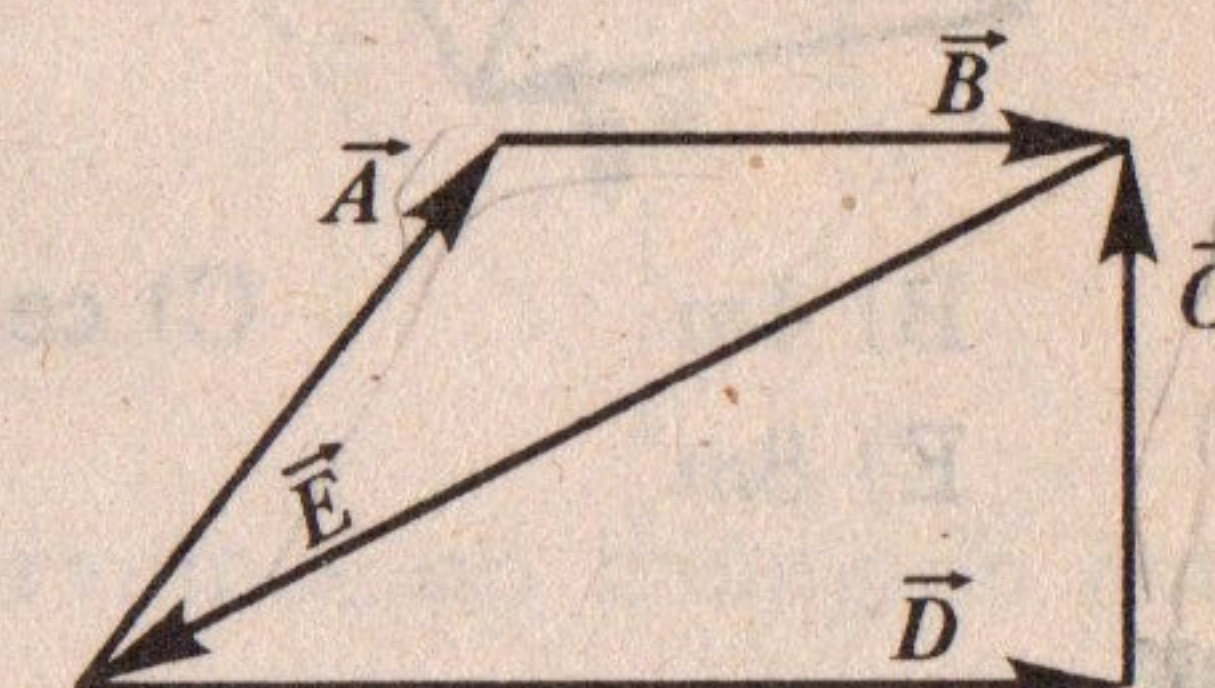
$$\therefore R = 24m$$

Clave: C

### PROBLEMA N°2 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Dado el conjunto de vectores que se muestra determinar el vector  $\vec{R}$  en términos del vector  $\vec{E}$ .

$$\text{Si : } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$



A)  $\vec{E}$

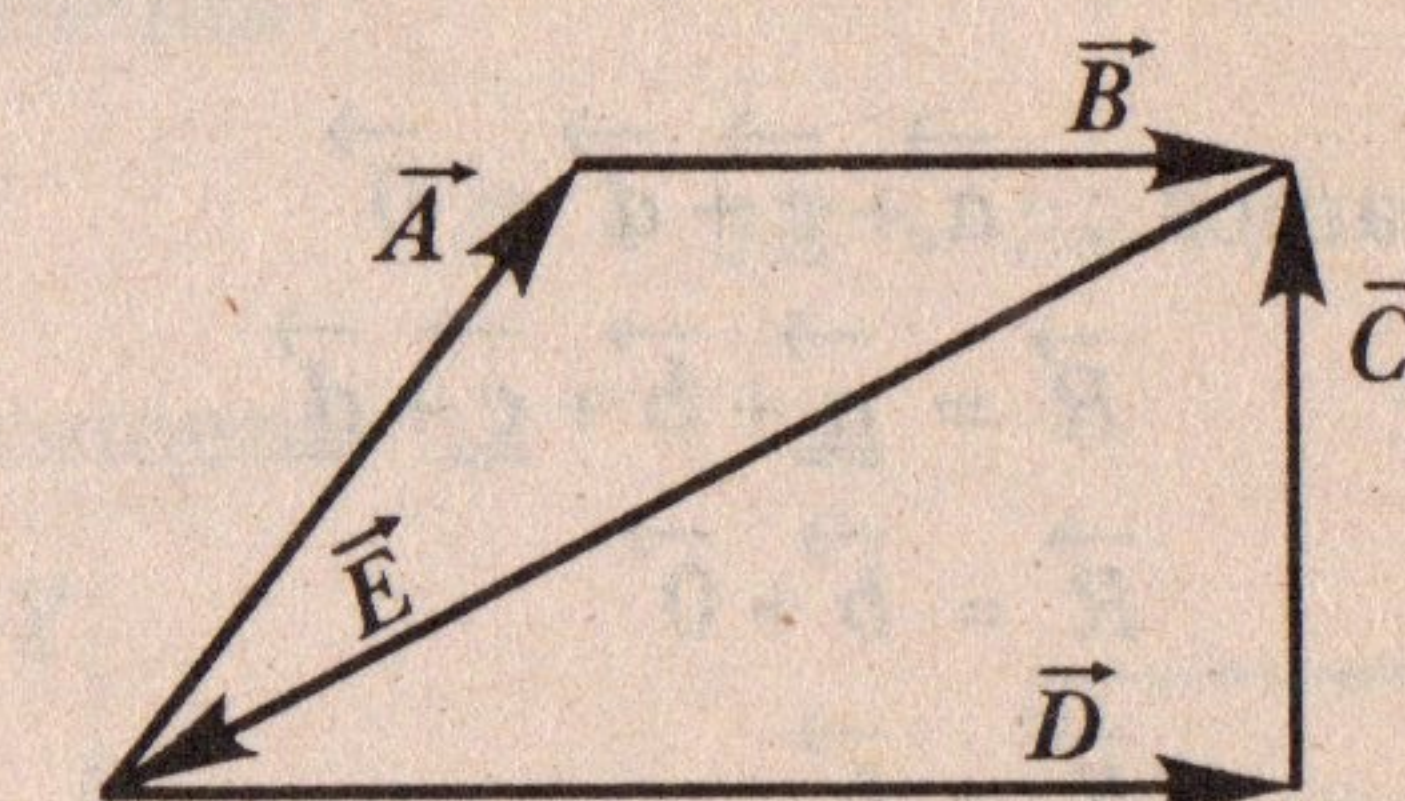
B)  $-\vec{E}$

C)  $2\vec{E}$

D)  $-2\vec{E}$

E)  $\vec{0}$

### RESOLUCIÓN



En la figura :

$$\begin{array}{l} * \vec{A} + \vec{B} + \vec{E} = \vec{0} \\ * \vec{D} + \vec{C} + \vec{E} = \vec{0} \end{array} \quad (+)$$



Sumando las 2 expresiones :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{E} + \vec{D} + \vec{C} + \vec{E} = \vec{0}$$

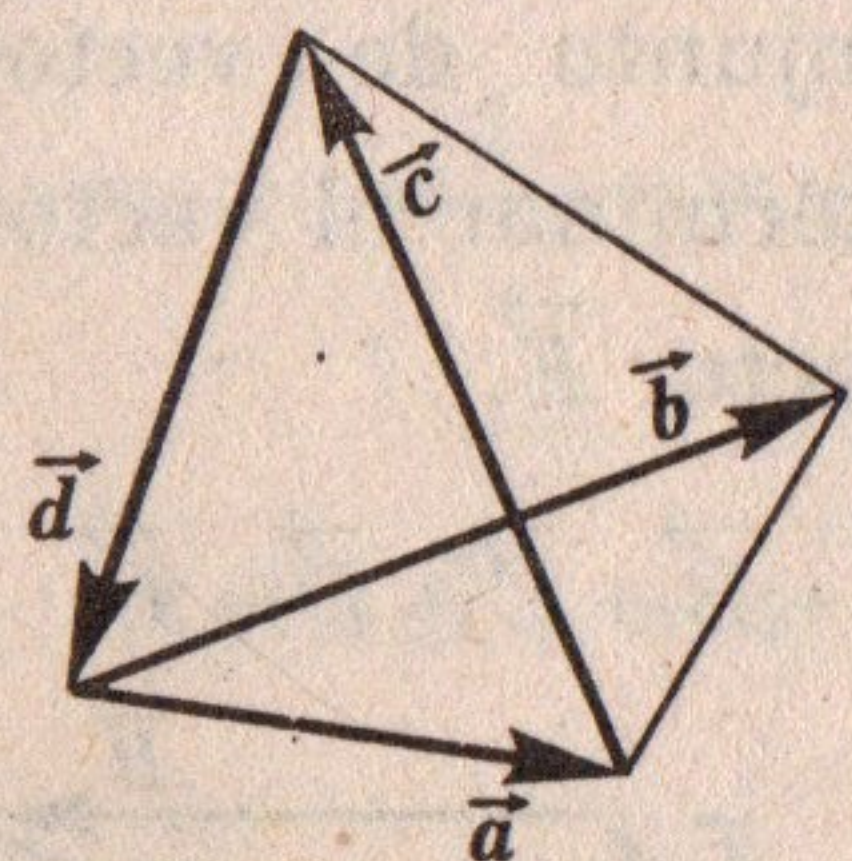
$$\vec{R} + \vec{E} = \vec{0}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = -\vec{E}}$$

Clave: B

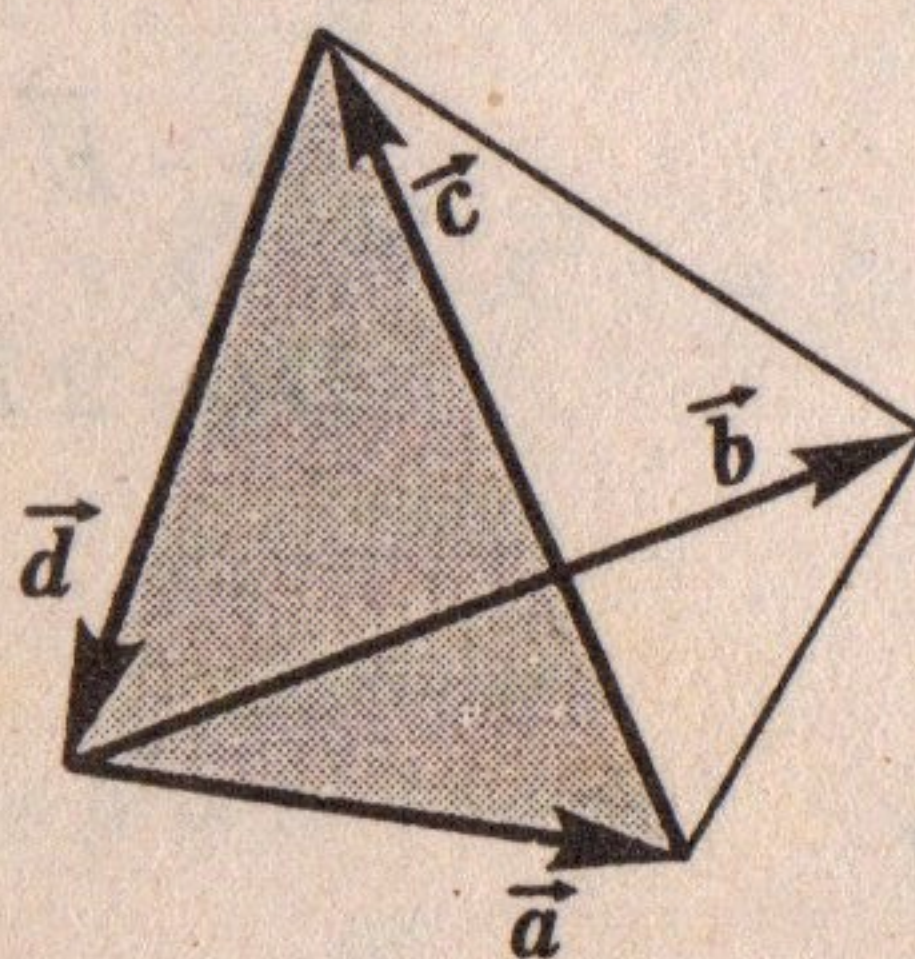
**PROBLEMA N°3** (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

La figura muestra un tetraedro regular de 2 m de lado, halle el módulo de la resultante de todos los vectores mostrados.



- A) 2m      B) 4m      C) cero  
D) 1m      E) 8m

**RESOLUCIÓN**



Observamos :  $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

Luego :  $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$   
 $\vec{R} = \vec{b} + \vec{0}$   
 $\vec{R} = \vec{b}$

Pero :  $|\vec{b}| = 2m$

$$\therefore \boxed{R = 2m}$$

Clave: A

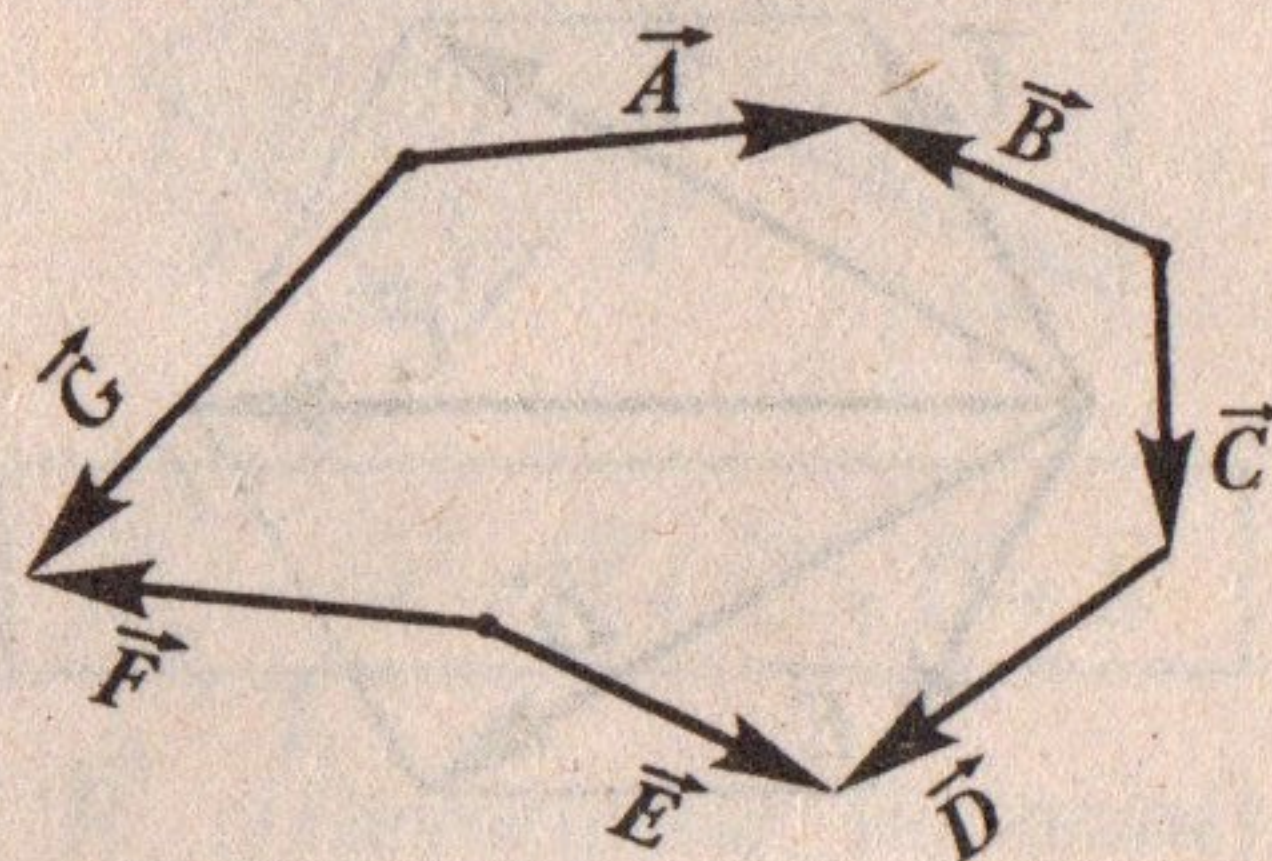
**PROBLEMA N°4** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

En el sistema de vectores mostrados, determine la magnitud de :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} + \vec{G}$$

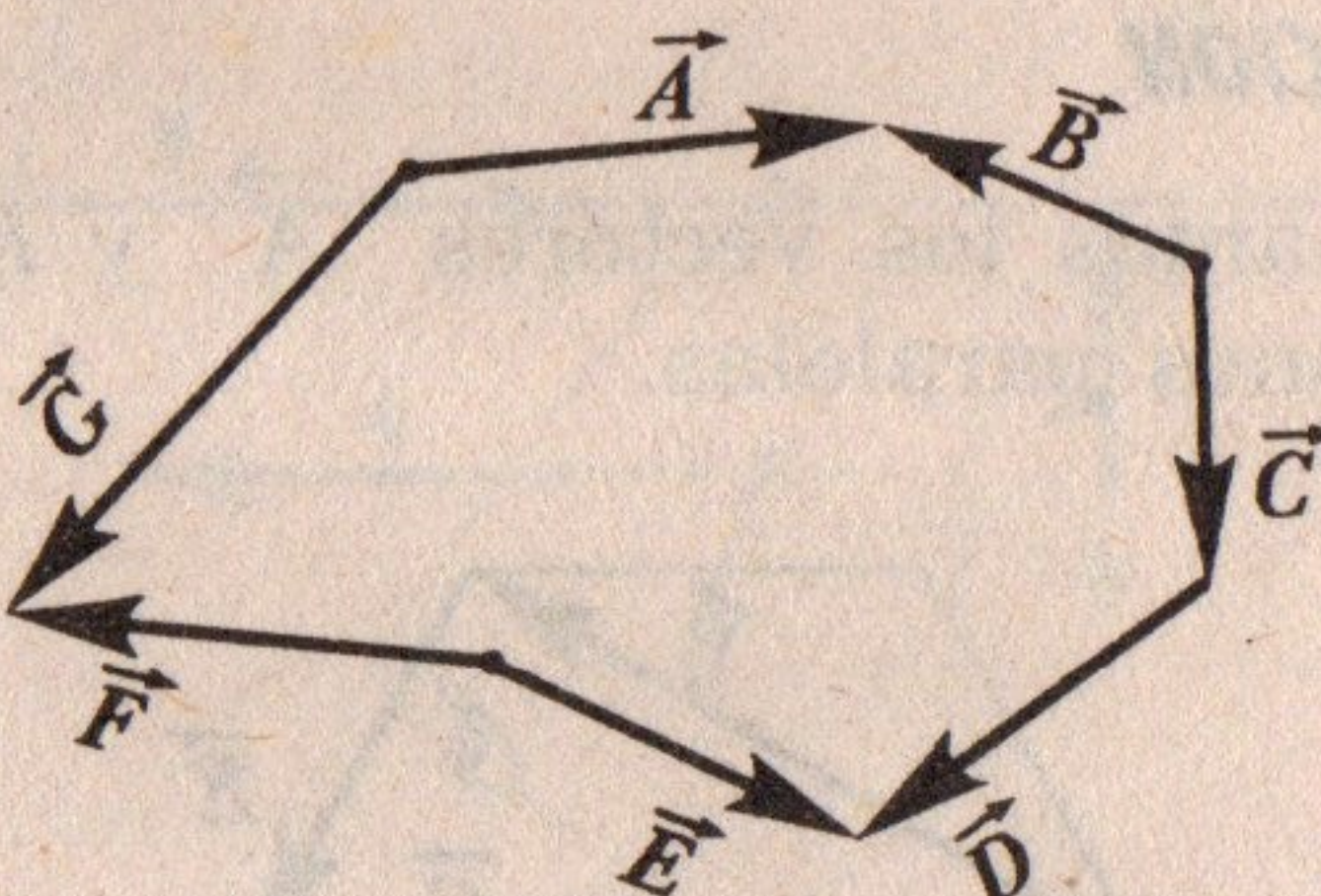
si se sabe que :

$$\vec{B} + \vec{E} = \vec{G} \quad \text{y} \quad A = G = 10u.$$



- A) 10u      B) 20u      C) 80u  
D) 40u      E) cero

**RESOLUCIÓN**



Datos :

$$\vec{G} = \vec{B} + \vec{E} \quad \dots(I)$$

$$A = G = 10u$$

$\vec{R}$  : resultante

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} + \vec{G} \quad \dots(II)$$

En la figura :

$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} - \vec{E} + \vec{F} - \vec{G} = \vec{0}$$

$$\vec{A} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{F} = \vec{B} + \vec{E} + \vec{G} \quad \dots(III)$$

Reemplazando (III) en (II) :

$$\vec{R} = (\vec{B} + \vec{E} + \vec{G}) + (\vec{B} + \vec{E} + \vec{G})$$

$$\vec{R} = 2(\vec{B} + \vec{E} + \vec{G})$$

Reemplazando (I) :

$$\vec{R} = 2(\vec{G} + \vec{G}) = 4\vec{G}$$

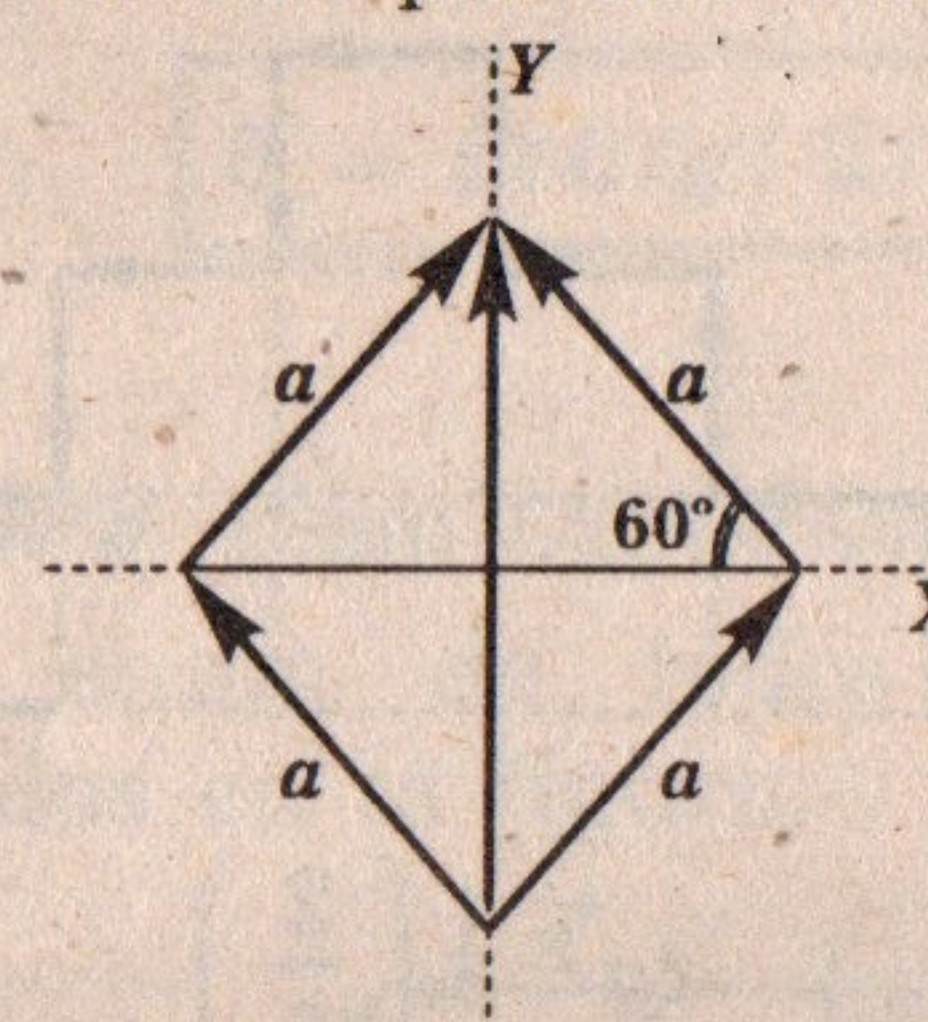
$$\text{si } G = 10u$$

$$\therefore \boxed{R = 40u}$$

Clave: D

**PROBLEMA N°5** (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

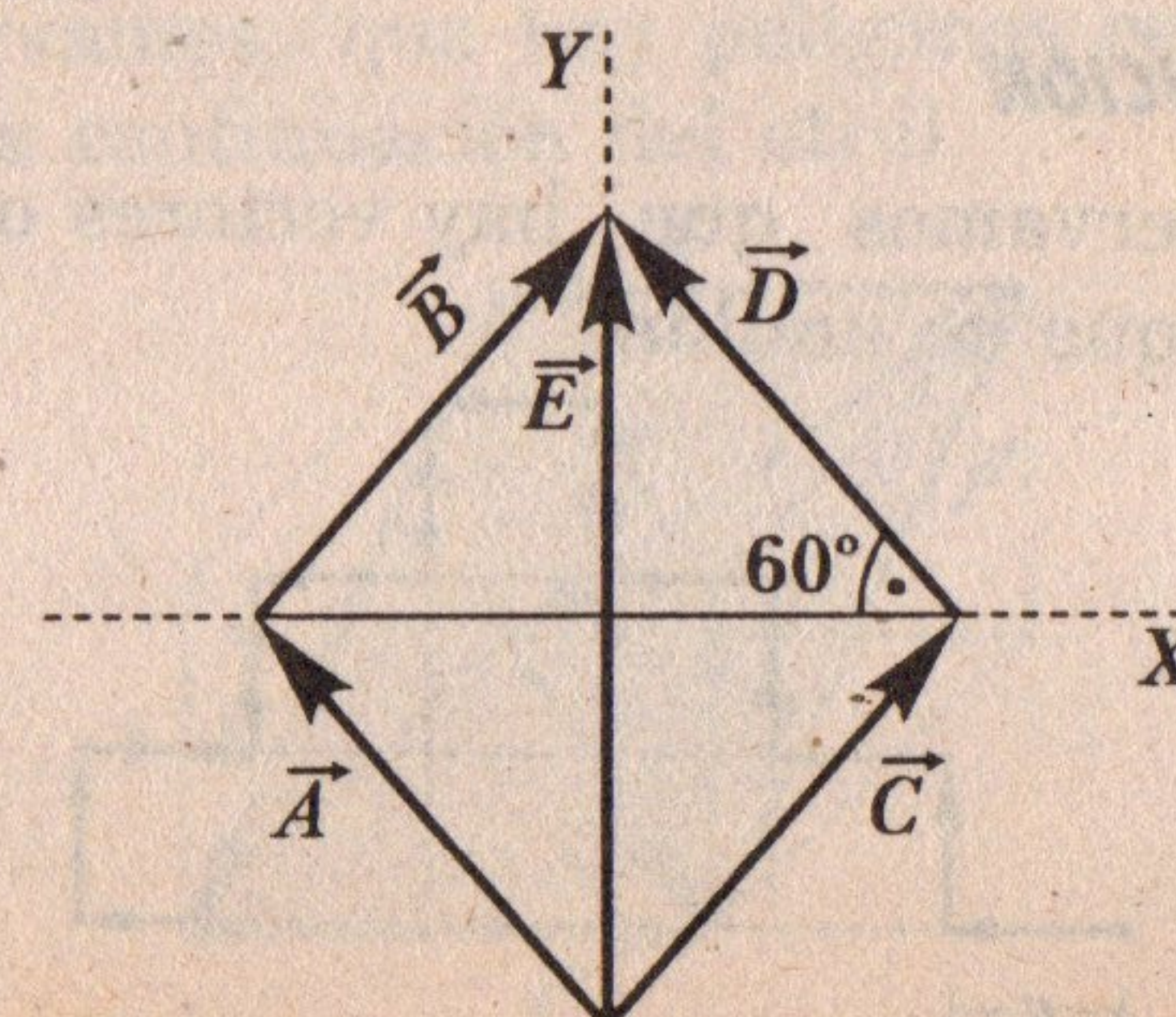
La figura muestra un conjunto de vectores que coinciden con los lados y diagonales del rombo. Obtenga las componentes de la resultante a lo largo de las direcciones dadas por las diagonales



- A)  $R_x = a$       B)  $R_x = 3a\sqrt{3}$   
 $R_y = 3a\sqrt{3}$        $R_y = 0$   
C)  $R_x = a\sqrt{3}$       D)  $R_x = 0$   
 $R_y = 3a\sqrt{3}$        $R_y = a\sqrt{3}$   
E)  $R_x = 0$   
 $R_y = 3a\sqrt{3}$

**RESOLUCIÓN**

Llamemos :  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  y  $\vec{E}$  a los vectores



Luego :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{E}$$

$$\vec{C} + \vec{D} = \vec{E}$$

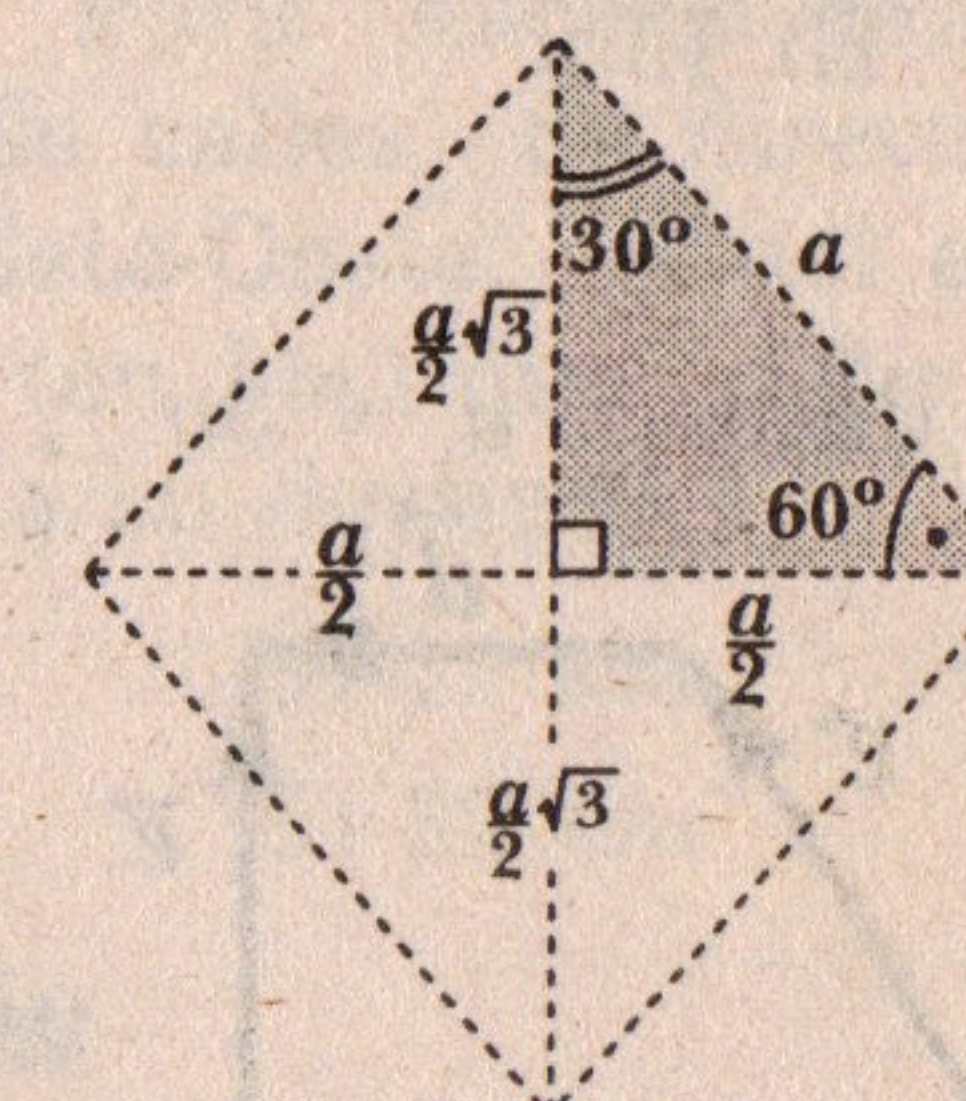
$$\text{Si : } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$

$$\vec{R} = \vec{E} + \vec{E} + \vec{E}$$

$$\vec{R} = 3\vec{E}$$

Cálculo del módulo de  $\vec{E}$ .

Hagamos uso de la geometría :



- \* Observamos un triángulo notable.
- \* Calculamos los catetos del  $\triangle$  sombreado.
- \* Luego :

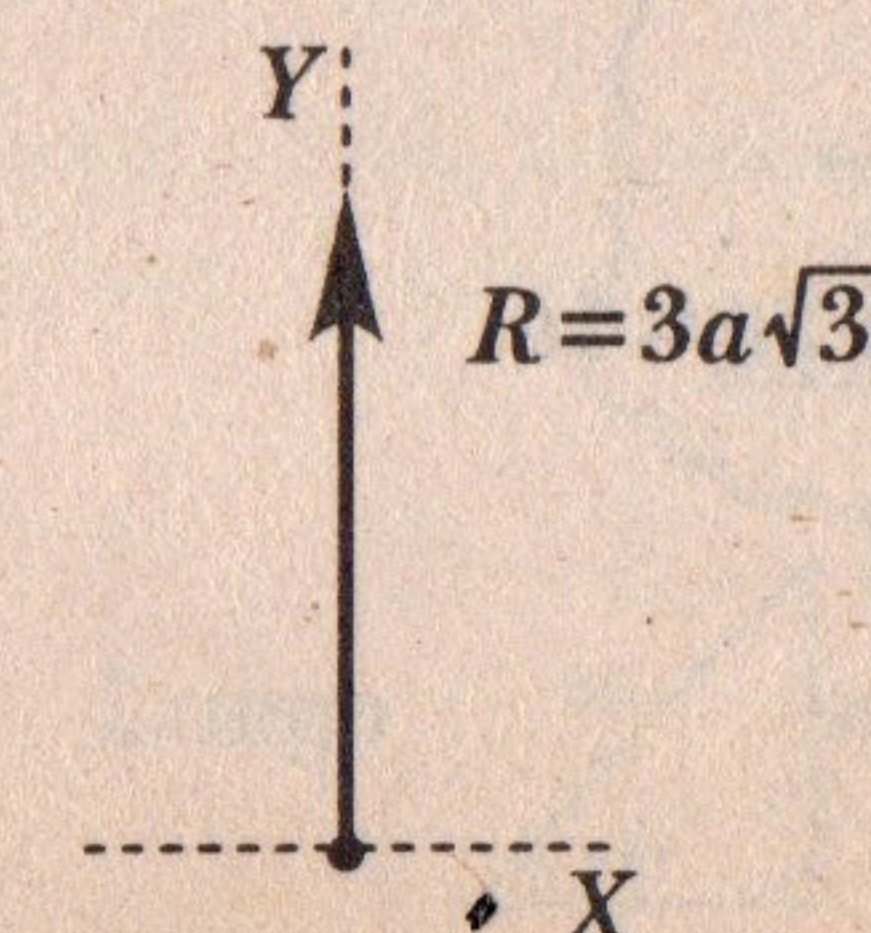
$$E = \frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow E = a\sqrt{3}$$

Finalmente :

$$R = 3E = 3a\sqrt{3}$$

Gráficamente :



$$R_x = 0$$

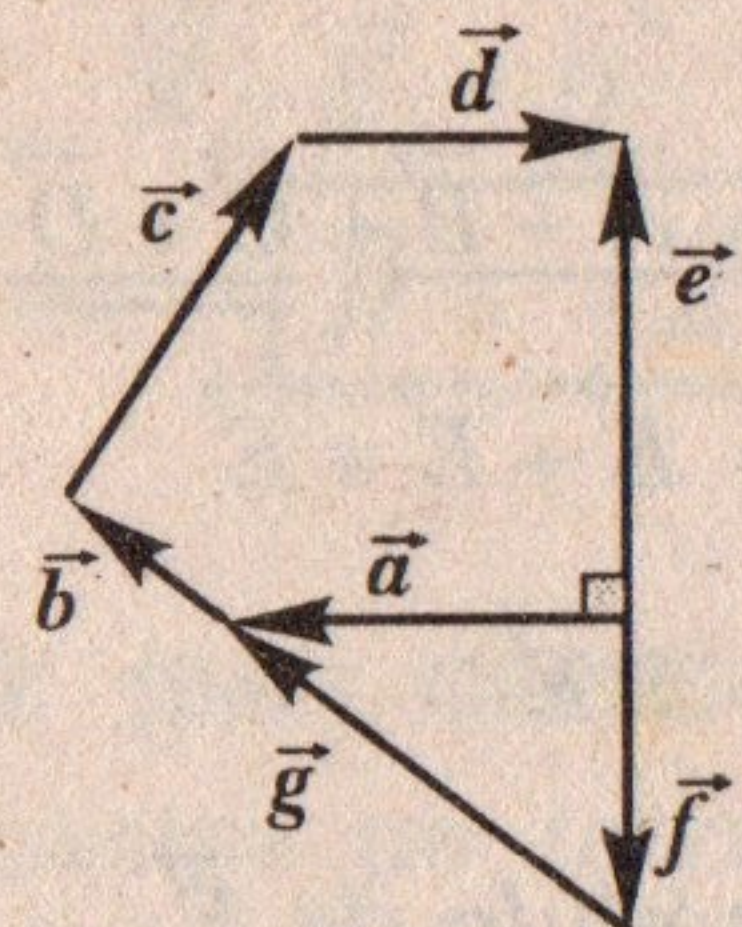
$$R_y = 3a\sqrt{3}$$

Clave: E



**PROBLEMA N°6** (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

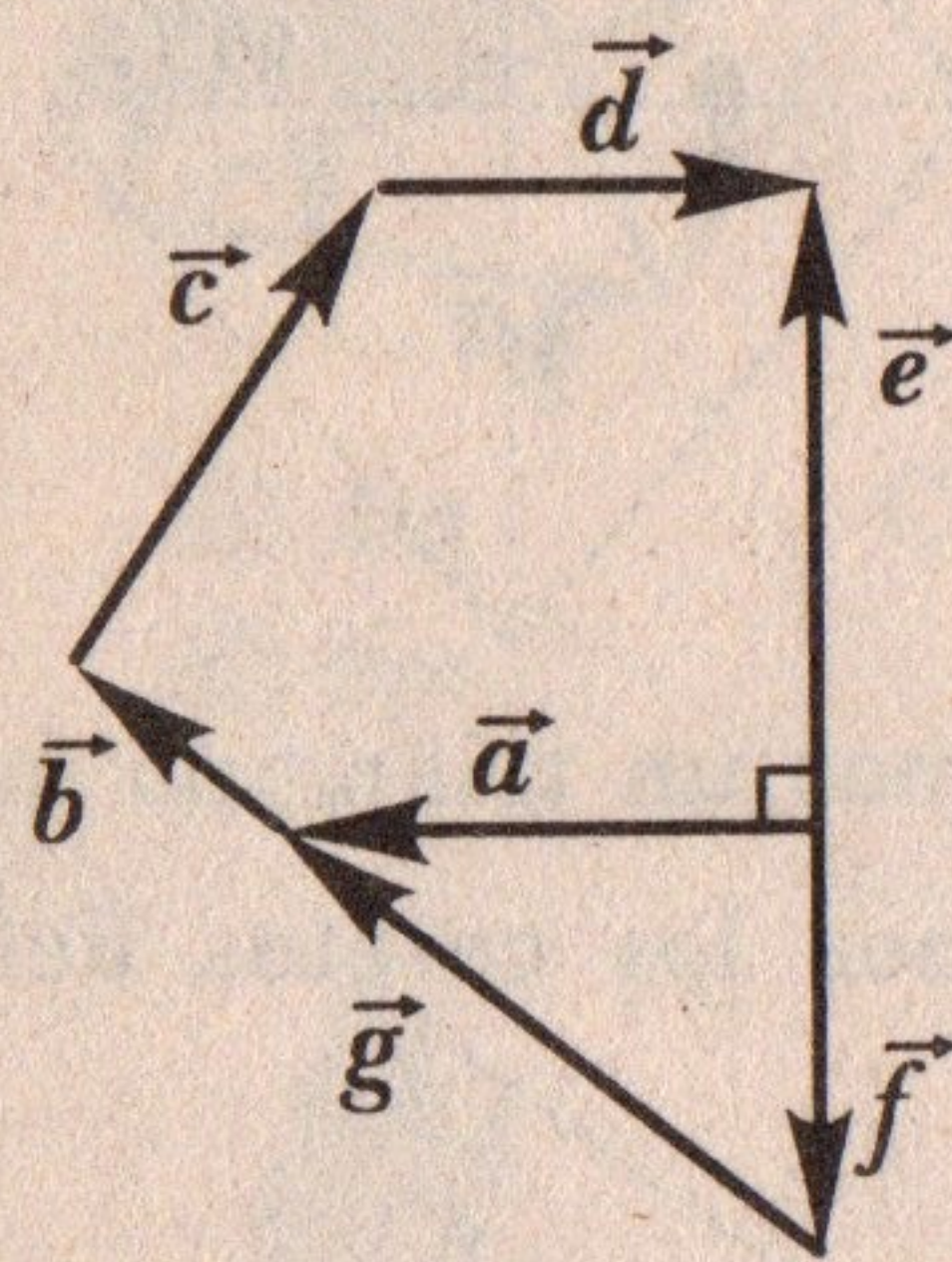
Hallar el módulo del vector resultante del sistema de vectores que se muestra en la figura. Si:  $a = 3u$  y  $e = 2u$ .



- A)  $5u$       B)  $7u$       C)  $10u$   
 D)  $\sqrt{13}u$       E)  $15u$

**RESOLUCIÓN**

Recordar los datos:  $a = 3u$ ;  $b = 2u$



En la figura: \*  $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

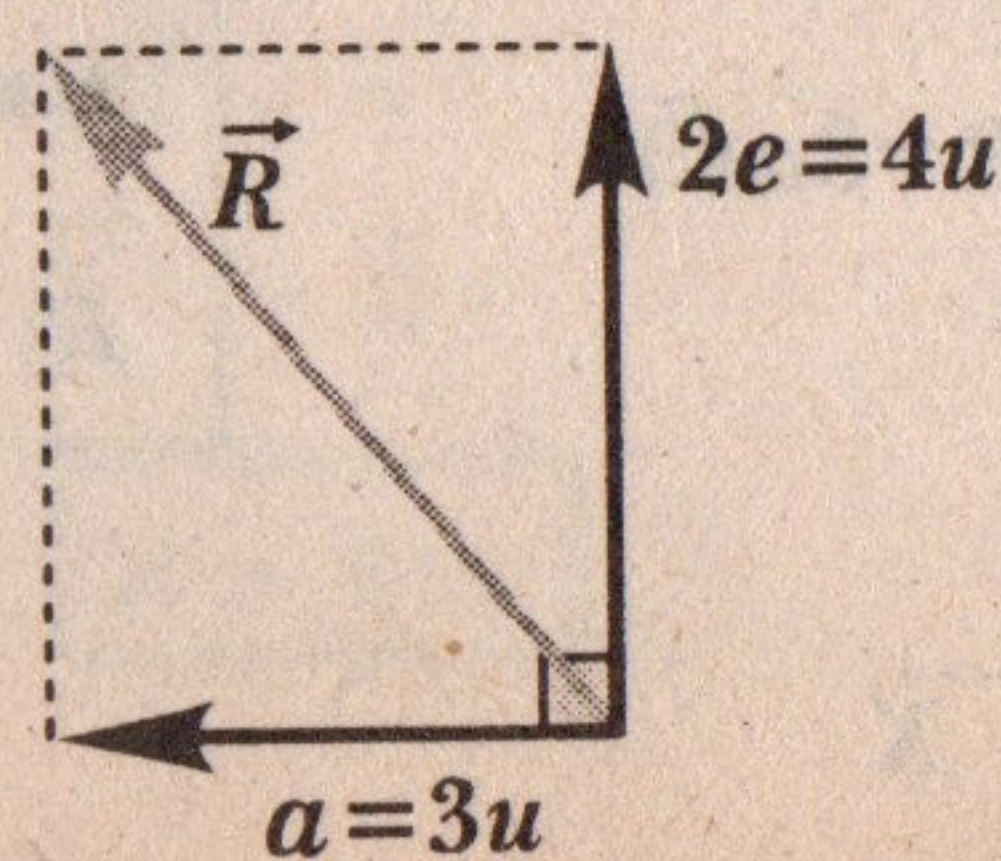
$$* \vec{a} = \vec{f} + \vec{g}$$

Pero:  $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g}$

Luego:  $\vec{R} = \vec{e} + \vec{e} + \vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{a} + 2\vec{e}$$

Graficando:



Por teorema de Pitágoras:

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

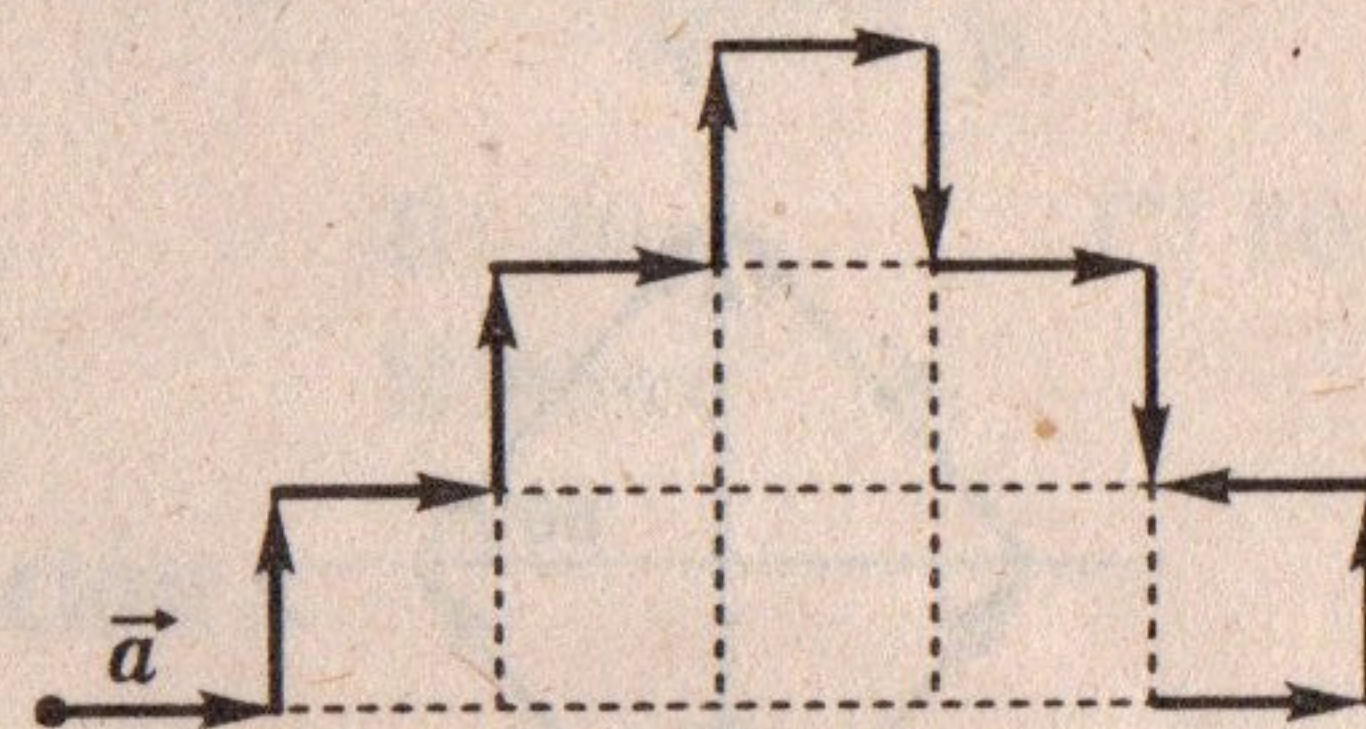
$$\therefore \boxed{R = 5u}$$

Clave: A

**PROBLEMA N°7** (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Calcular el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados y el ángulo que forma el vector resultante con la horizontal.

(Todos los vectores tienen igual módulo y ubicados en la cuadrícula)



A)  $a\sqrt{26}$ ;  $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

B)  $a\sqrt{24}$ ;  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$

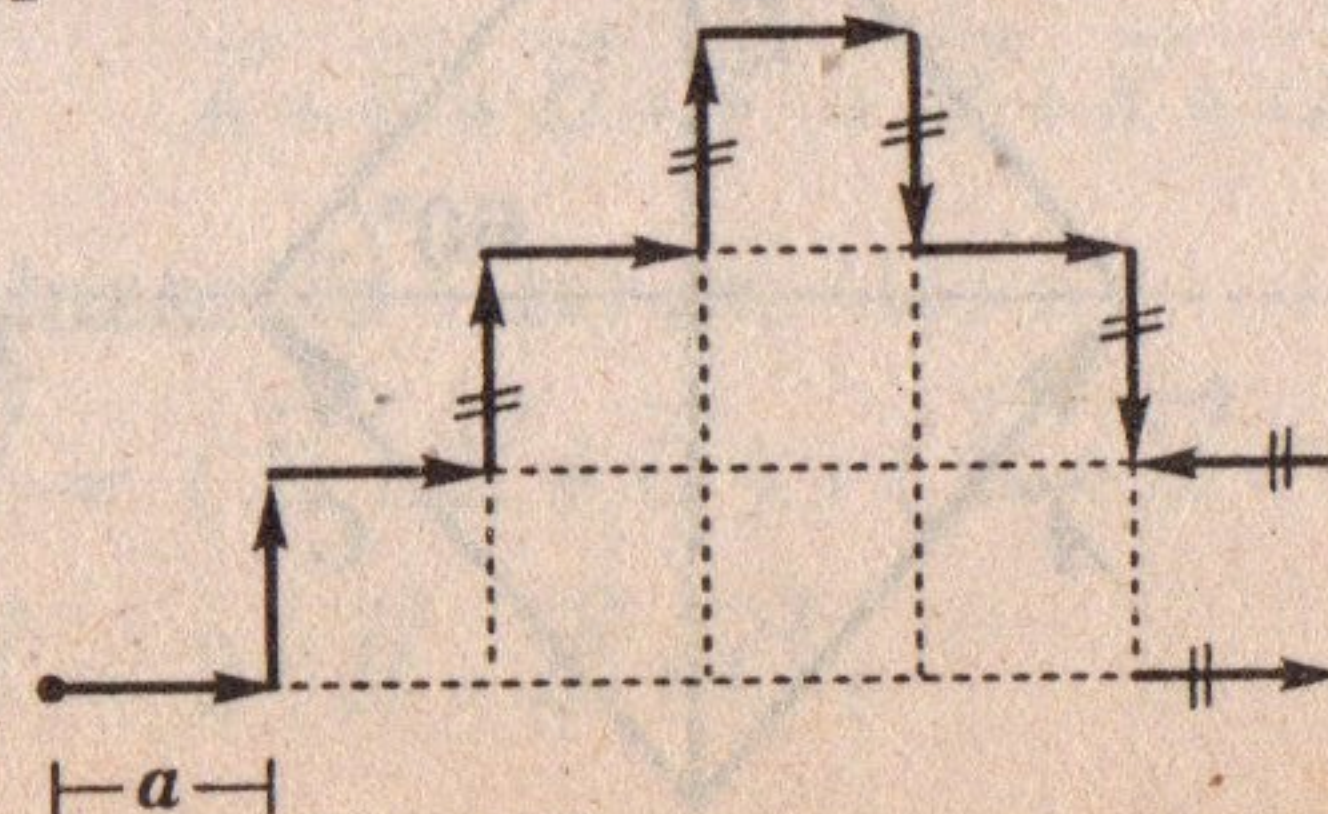
C)  $a\sqrt{29}$ ;  $\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

D)  $a\sqrt{26}$ ;  $\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

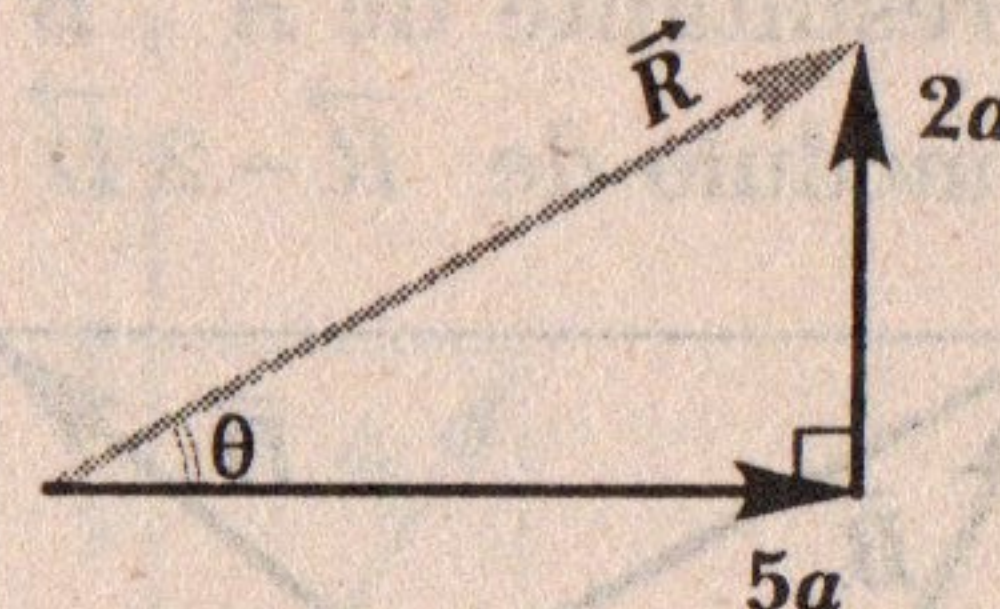
E)  $a\sqrt{29}$ ;  $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

**RESOLUCIÓN**

\* Observamos que hay vectores opuestos que se anulan.



\* Sumando los vectores horizontales y verticales



$$R = \sqrt{(5a)^2 + (2a)^2}$$

$$\therefore \boxed{R = a\sqrt{29}}$$

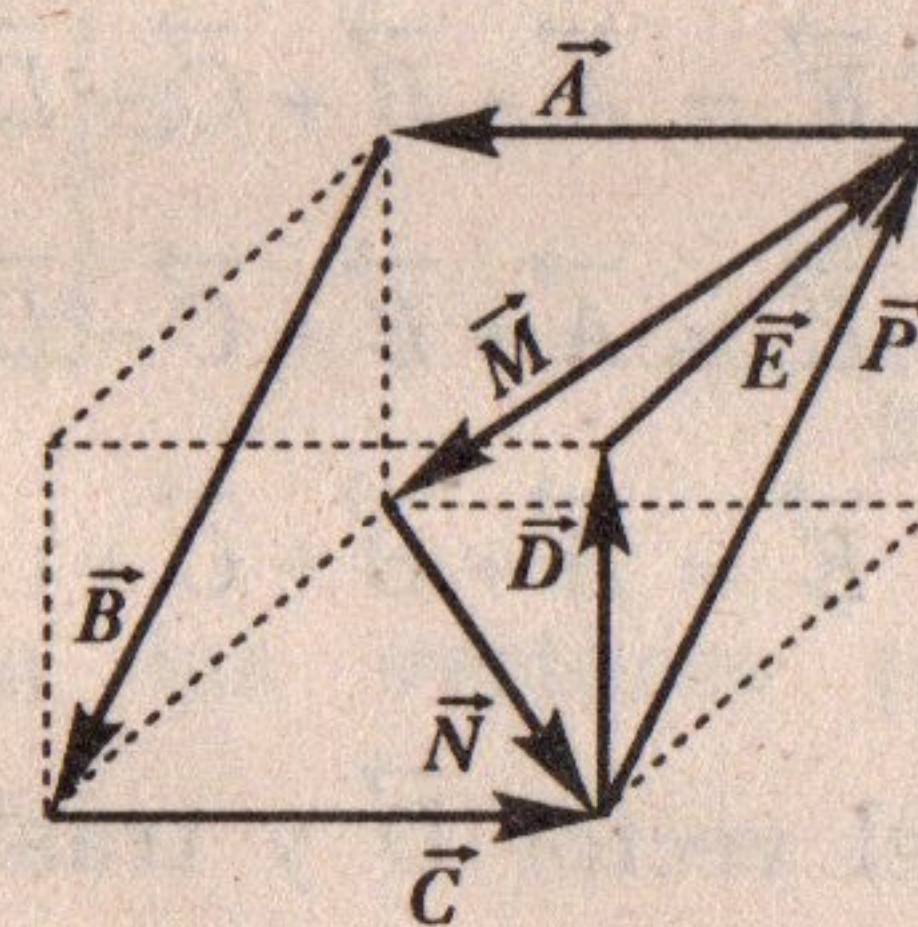
\* También:  $\tan \theta = \frac{2a}{5a}$

$$\therefore \boxed{\theta = \arctan(2/5)}$$

Clave: E

**PROBLEMA N°8** (Sem CEPRE-UNI 97-I)

Hallar la suma de todos los vectores mostrados en la figura.

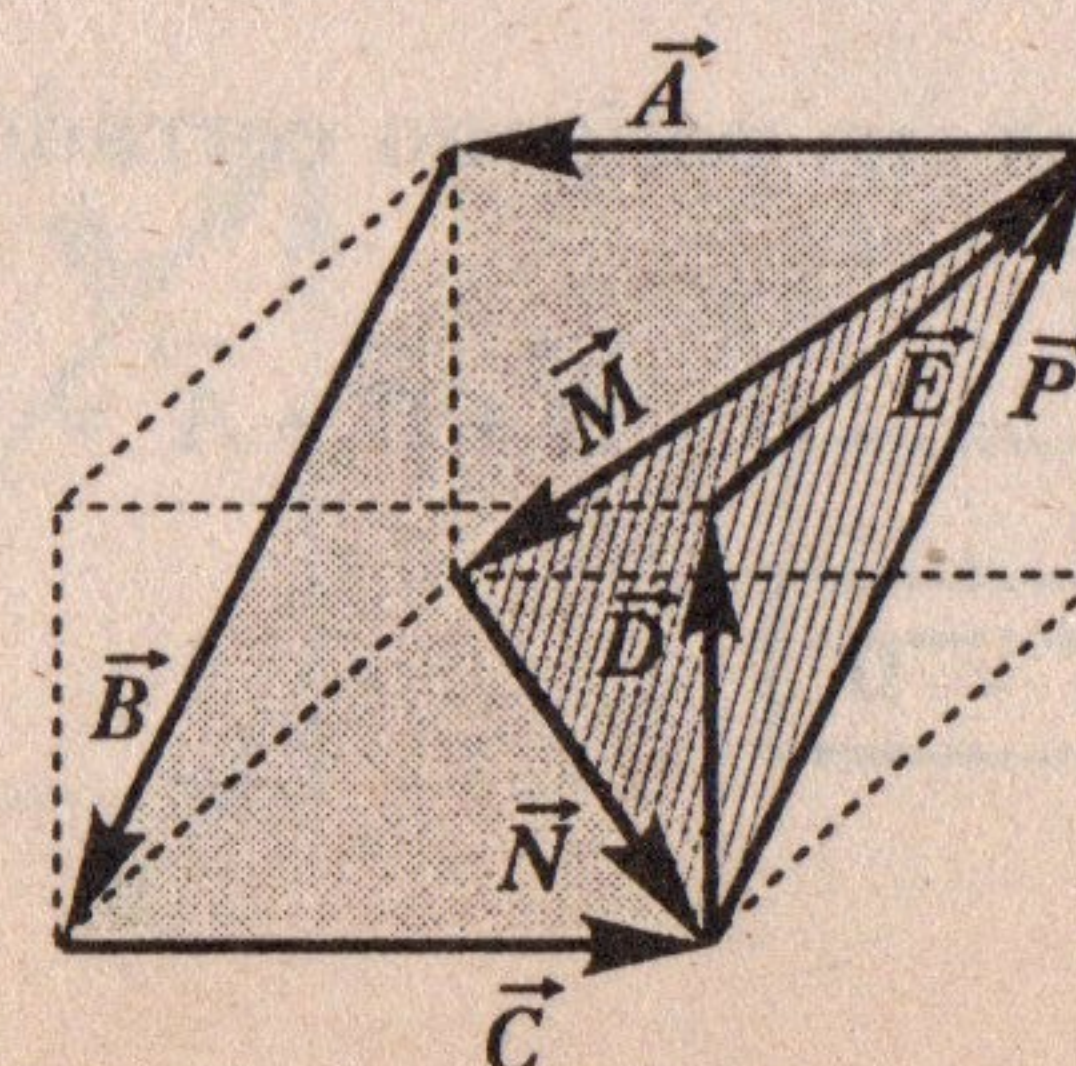


A)  $\vec{B} + \vec{A}$       B)  $\vec{0}$       C)  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{E}$

D)  $\vec{M} - \vec{N}$       E) Faltan datos

**RESOLUCIÓN**

Observamos que hay polígonos cerrados (uno a continuación del otro)



$$* \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{0}$$

$$* \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{M} + \vec{N} + \vec{P}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = \vec{0}}$$

Clave: B

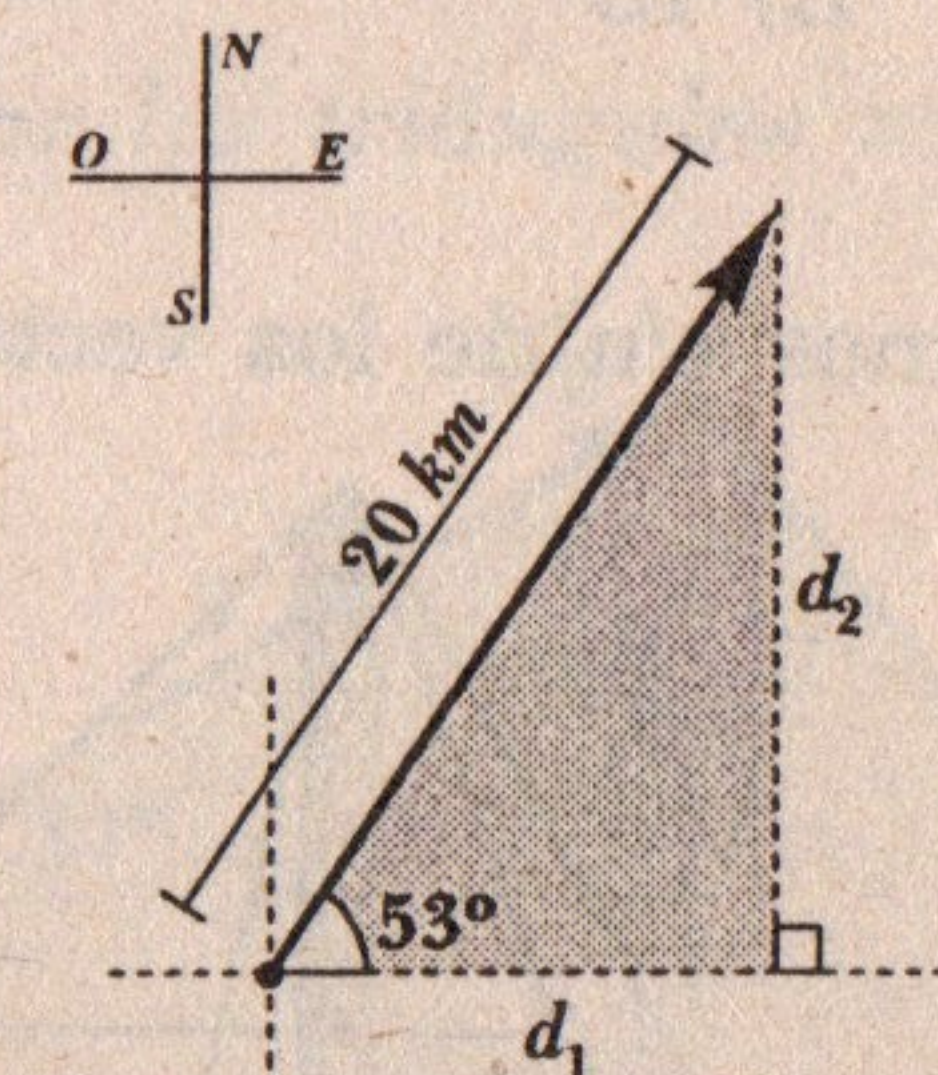
**PROBLEMA N°9** (Sem. CEPRE-UNI 96-II)

Una persona quiere llegar a un punto que está a 20 km de su localización actual y en una dirección de  $53^\circ$  al norte del Este. Para hacerlo debe moverse a lo largo de calles de direcciones Norte-Sur y Este-Oeste. ¿Cuál es la mínima distancia (en km) que debe recorrer para llegar a su destino?

- A) 28 km      B) 12 km      C) 16 km  
 D) 20 km      E) 32 km

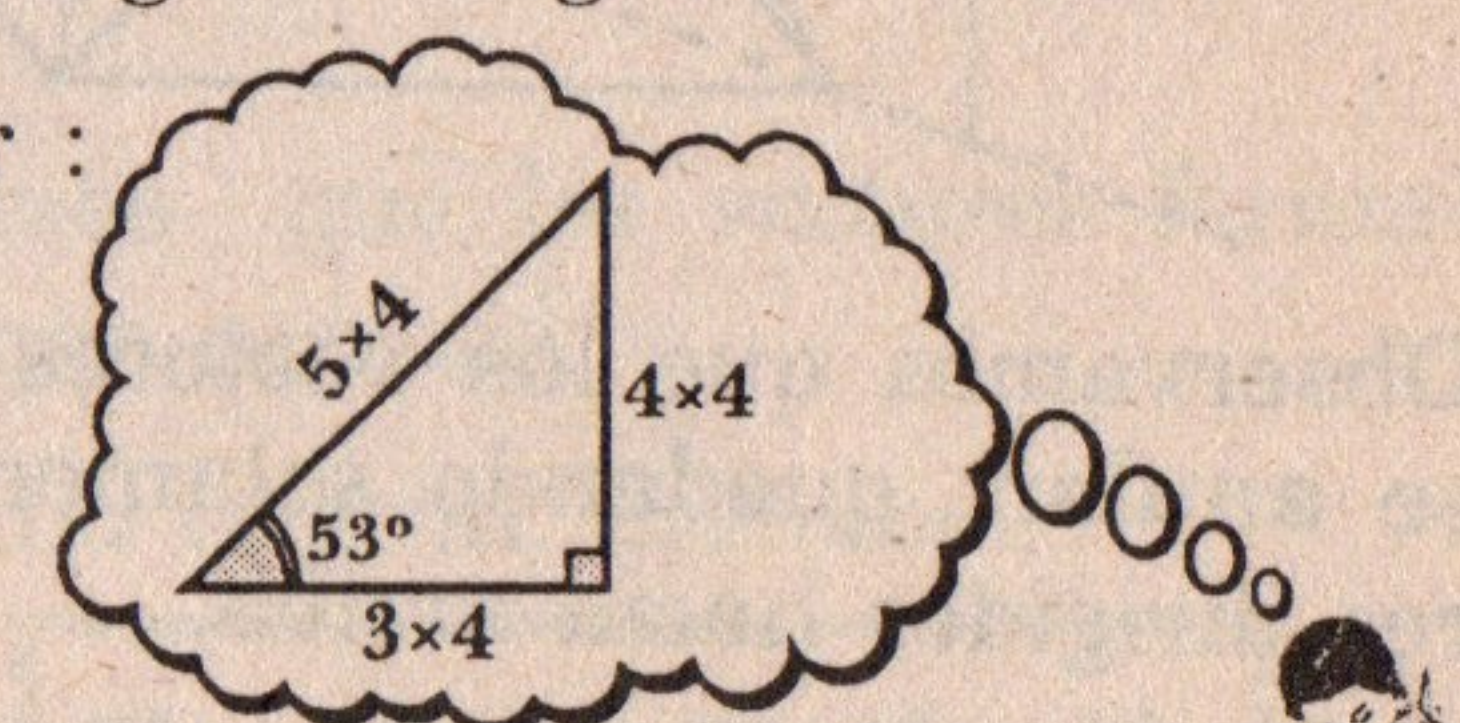
**RESOLUCIÓN**

Hacemos coincidir los puntos cardinales con los ejes cartesianos.



\* Será el mínimo recorrido cuando se traslade según la figura indicada.

Recordar:



Luego:  $d_2 = 16$   
 $d_1 = 12$



$$d_1 + d_2 = 28$$

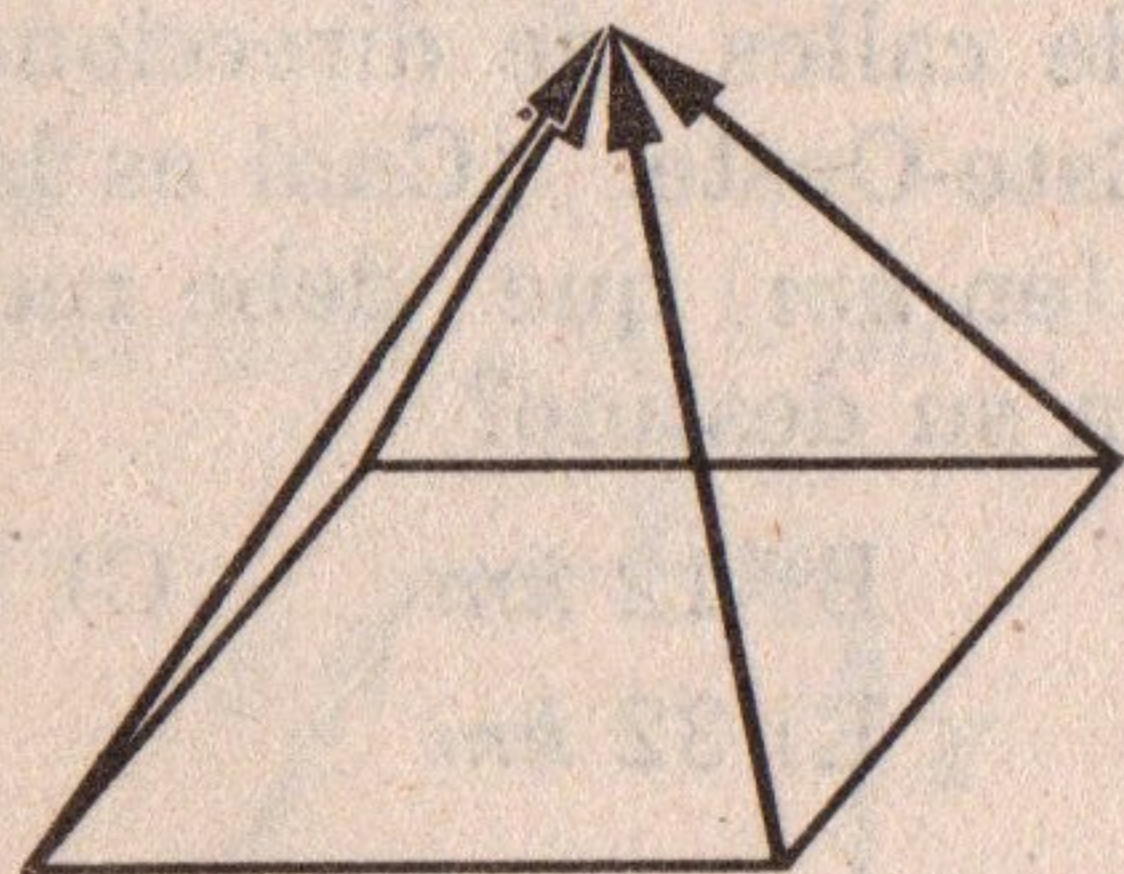
$$\therefore d_1 + d_2 = 28 \text{ km}$$

Clave: D

### PROBLEMA N°10 (Sem. CEPRE-UNI 96-II)

El gráfico que se muestra es una pirámide recta cuya base es un cuadrado de lado 3 m; su altura es igual a 4,5 m e incide en la intersección de las diagonales de su base.

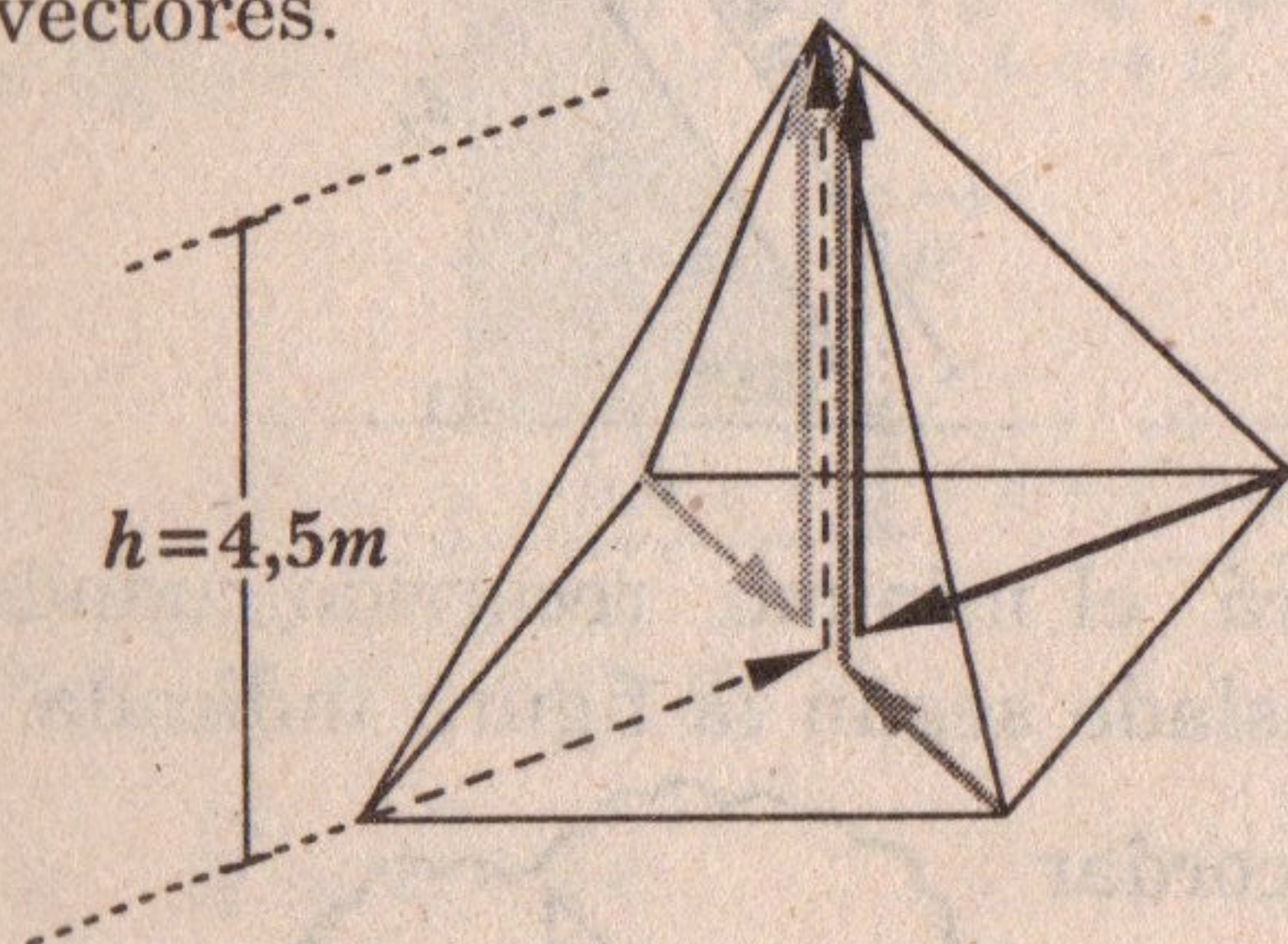
Hallar el módulo (en m) de la resultante de los vectores que se indican.



- A) 9      B) 27      C) 36  
D) 1,8      E) 18

### RESOLUCIÓN

Descomponemos c/u de los vectores como dos vectores.



Observamos que los vectores de la base se anulan; quedando solamente 4 vectores dirigidos hacia arriba.

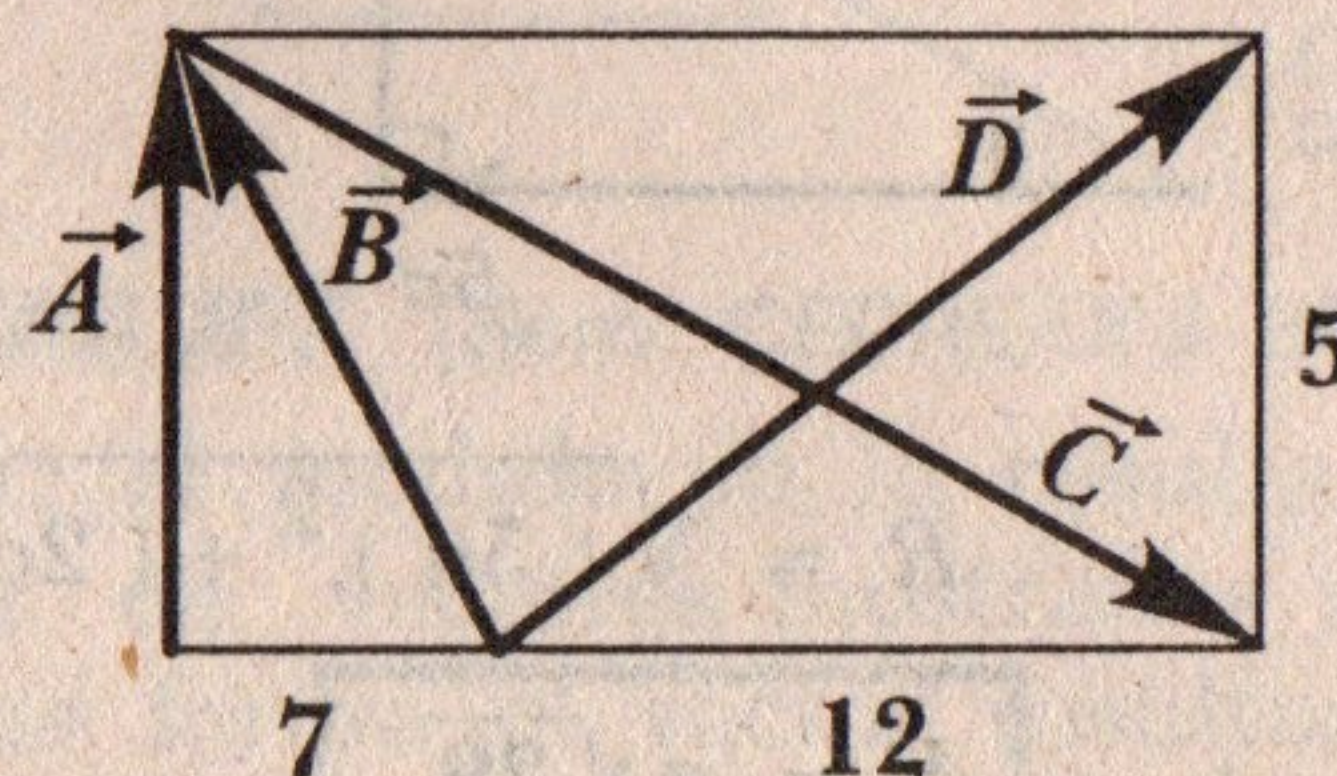
Luego:  $R = 4 \times 4,5$

$$\therefore R = 18 \text{ m}$$

Clave: E

### PROBLEMA N°11

Si  $\vec{R}$  es la resultante de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$ .  
Hallar: el módulo de  $\vec{R} - 2\vec{D}$ .



- A) 13      B) 0      C) 5  
D) 19      E) 0

### RESOLUCIÓN

Nos dicen:  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

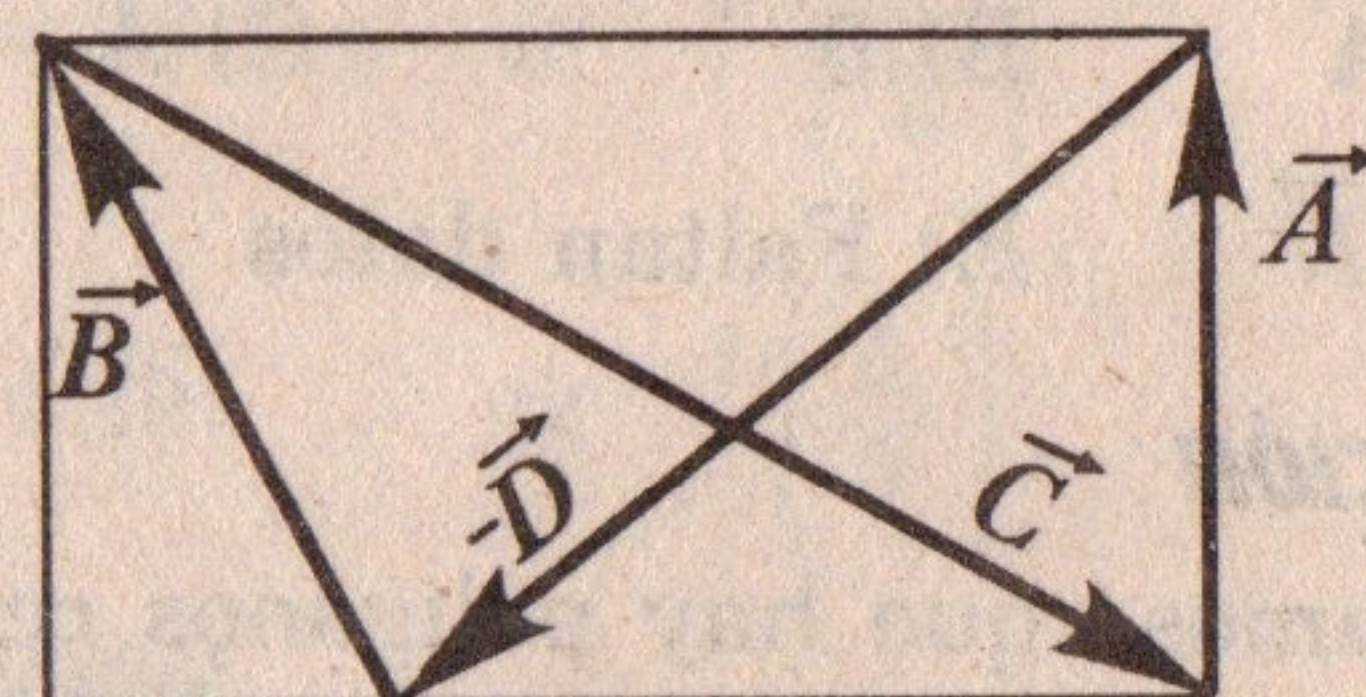
Pero piden:  $\vec{E} = \vec{R} - 2\vec{D}$

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} - 2\vec{D}$$

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$$

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + (-\vec{D}) \dots (I)$$

Invertimos el vector  $\vec{D}$  y trasladamos el vector  $\vec{A}$ . Quedará entonces:



Observamos un polígono cerrado y de (I):

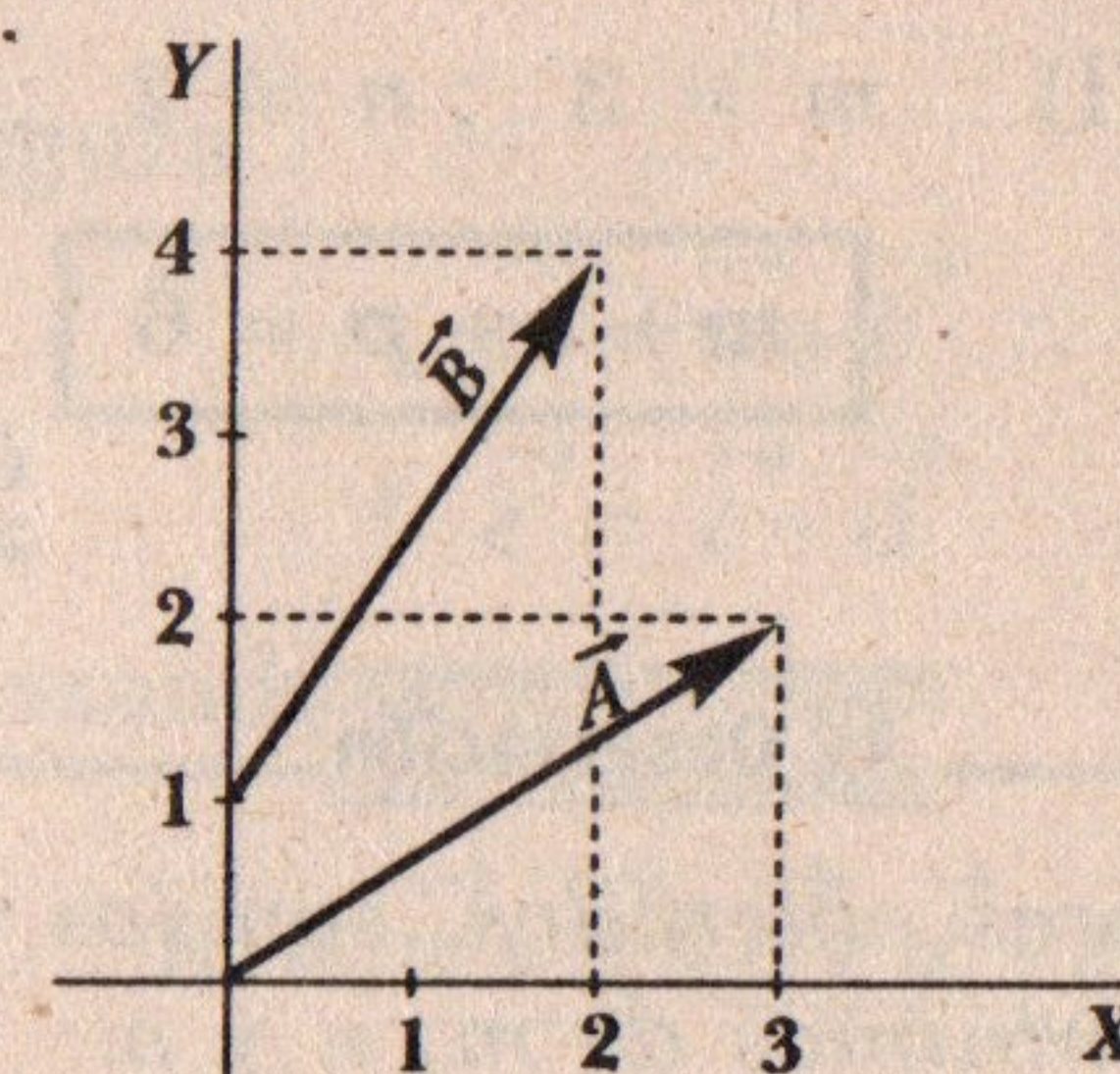
$$\vec{E} = -\vec{D} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{A} = \vec{0}$$

$$\therefore E = 0$$

Clave: B

### PROBLEMA N°12

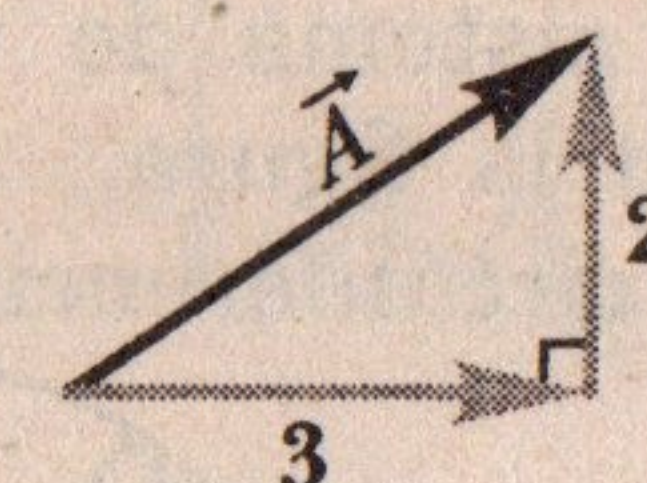
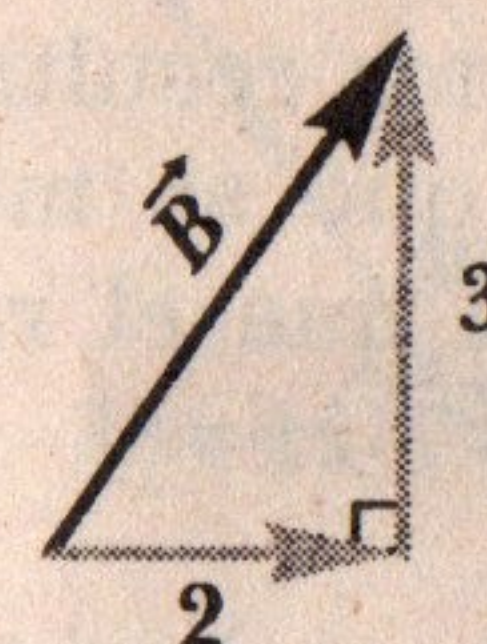
Determinar la magnitud del vector  $2\vec{A} + \vec{B}$ .



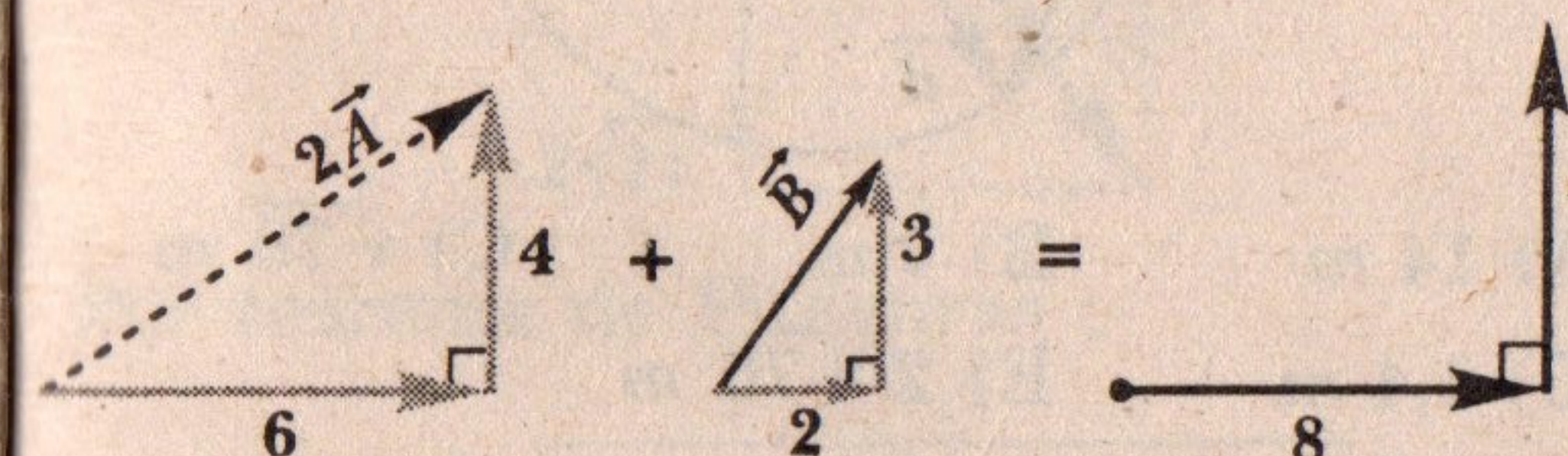
- A)  $\sqrt{85}$       B)  $\sqrt{123}$       C)  $\sqrt{15}$   
D)  $\sqrt{113}$       E) 8

### RESOLUCIÓN

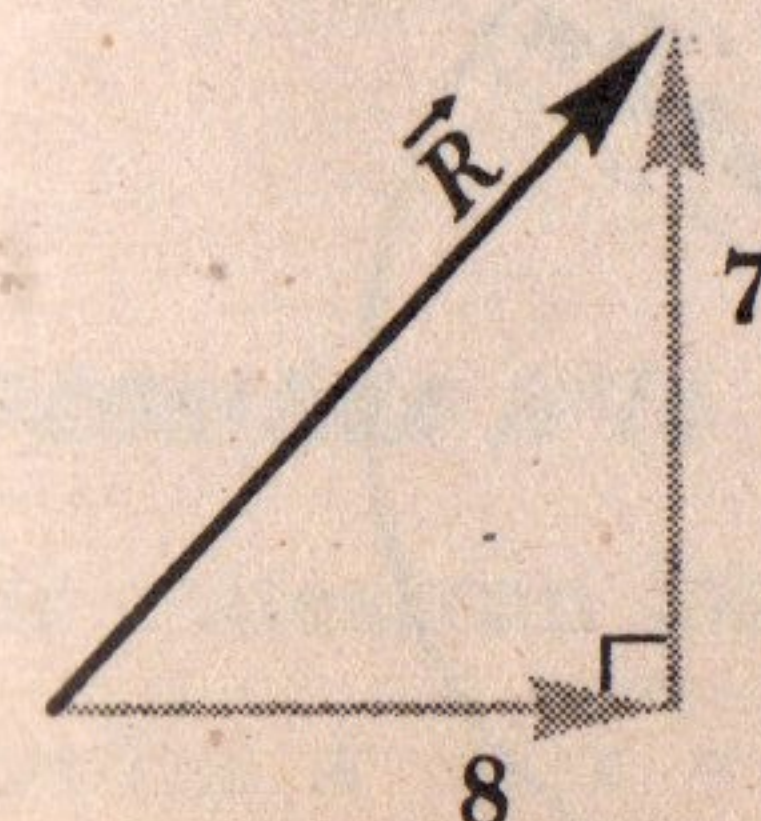
Para visualizar mejor, descomponemos los vectores por separado.



Sumaremos los vectores paralelos de  $2\vec{A} + \vec{B}$ .



Luego:



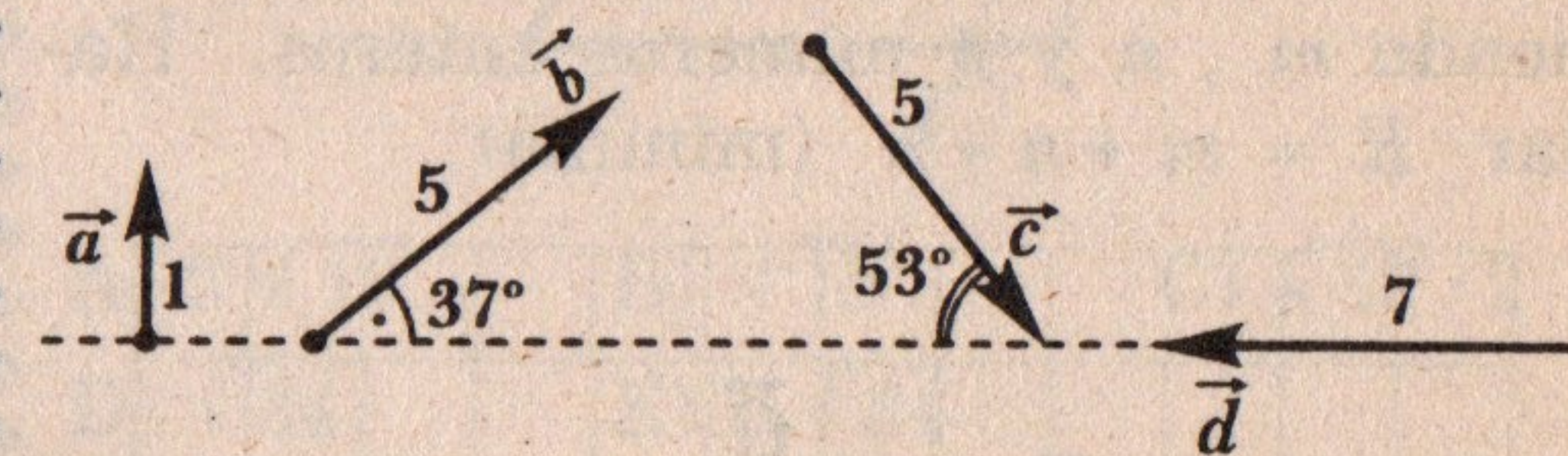
$$|\vec{R}| = \sqrt{8^2 + 8^2}$$

$$\therefore R = \sqrt{113}$$

Clave: D

### PROBLEMA N°13

La figura muestra 4 vectores, con indicación de sus magnitudes y orientaciones. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

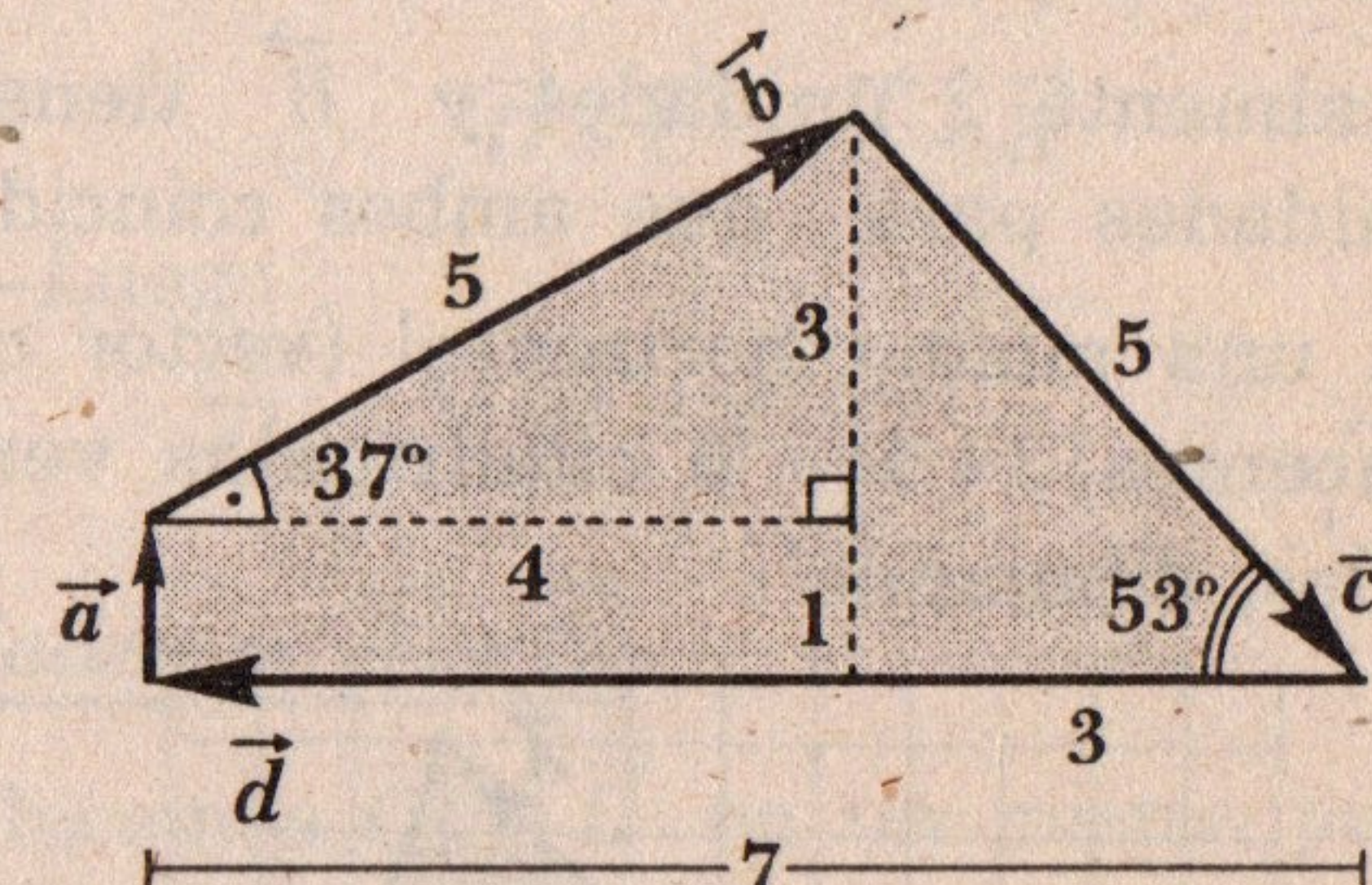


- A)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$   
B)  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$   
C)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$   
D)  $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$   
E)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

### RESOLUCIÓN

Ubicamos los vectores uno a continuación del otro.

(No olvidar los triángulos notables)



\* Observamos que los vectores forman un polígono cerrado.

\* Con mucha alegría, decimos:

$$\therefore \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

Clave: E

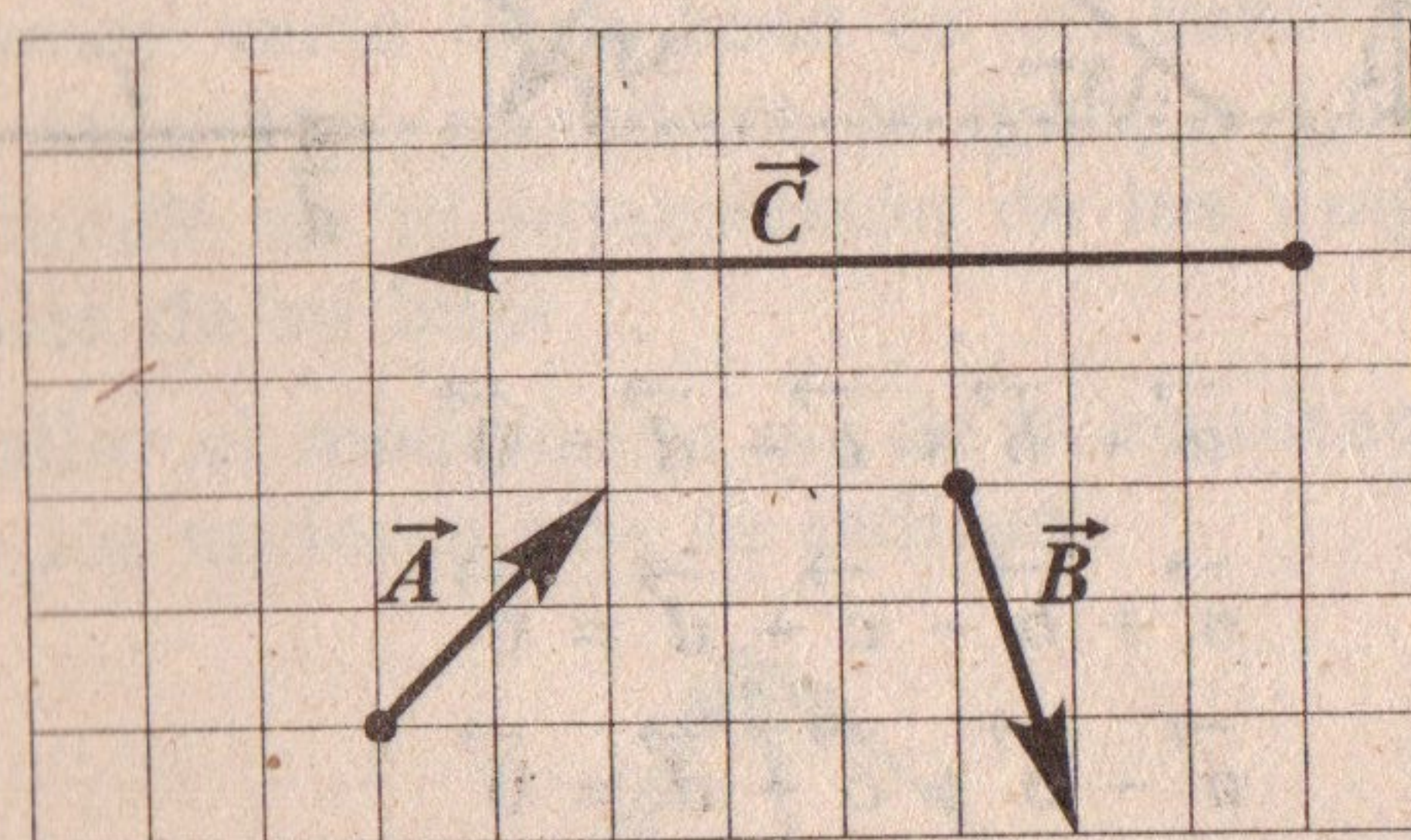


**PROBLEMA N°14** (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

En la figura se muestran 3 vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , si se cumple que :

$$m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C} = \vec{0}$$

siendo  $m$ ,  $n$  y  $p$  números enteros. Hallar  $E = m + n + p$  (mínimo)

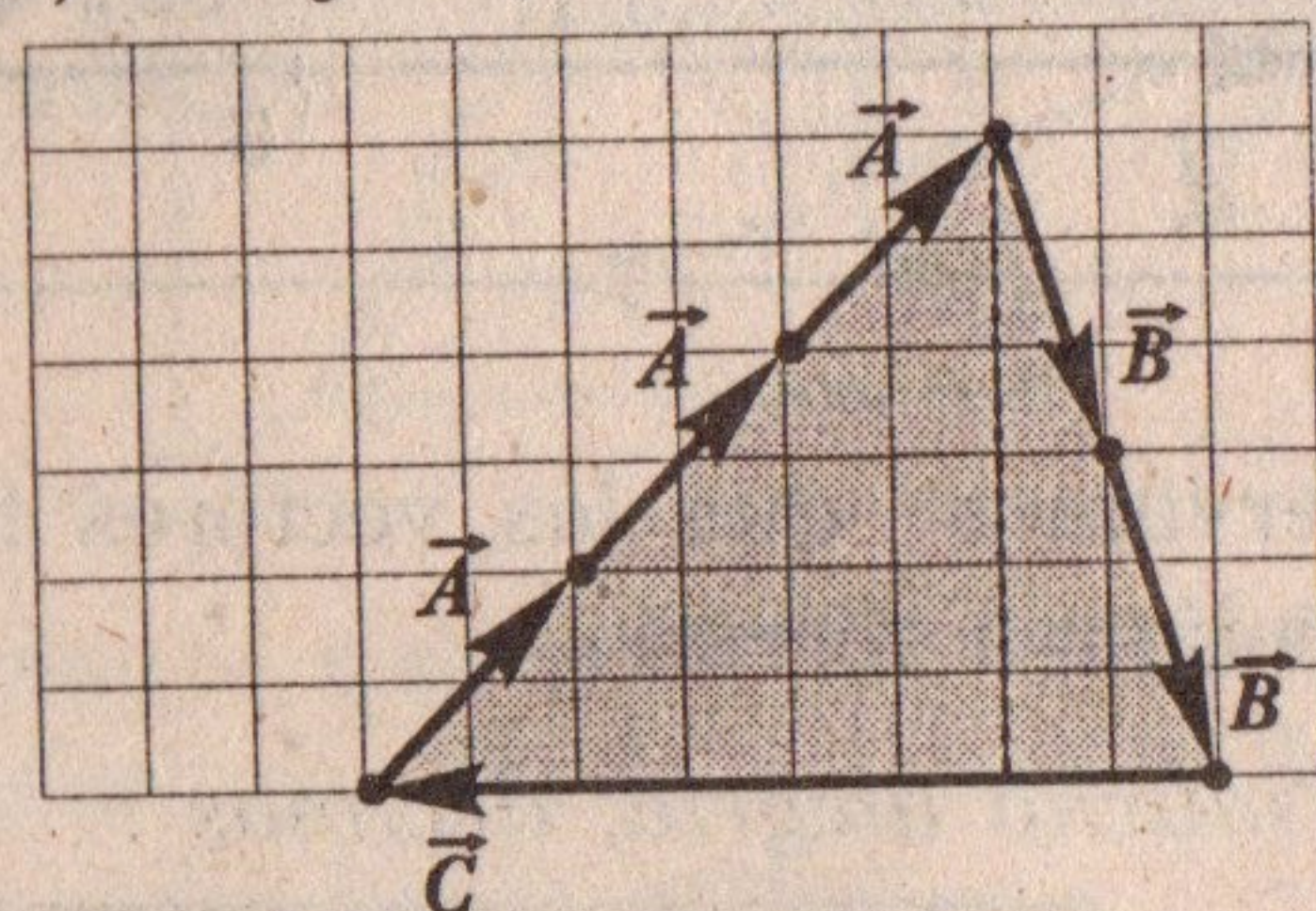


- A) 3    B) 5    C) 12    D) 6    E) 0

**RESOLUCIÓN**

\* Guiándonos por las cuadrículas ubicamos vectores uno a continuación del otro.

\* Si no coinciden adicionamos vectores, observar que el vector "A" tiene verticalmente 2 unidades y  $\vec{B}$  tiene 3 unidades para que ambos coincidan en una misma horizontal (vector  $\vec{C}$ ); hacemos  $3 \times 2 = 6$  cuadrículas verticales, dibujando :



¡Interesante coincidencia!

Luego diremos :

$$3\vec{A} + 2\vec{B} + \vec{C} = \vec{0} \quad \dots (I)$$

Por dato :

$$m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C} = \vec{0} \quad \dots (II)$$

De (I) y (II) :  $m = 3$  ;  $n = 2$  ;  $p = 1$

$$\therefore m + n + p = 6$$

Clave: D

**Observación**

Los valores obtenidos, son los valores enteros mínimos de  $m$ ,  $n$  y  $p$ .

En forma general estos valores serían

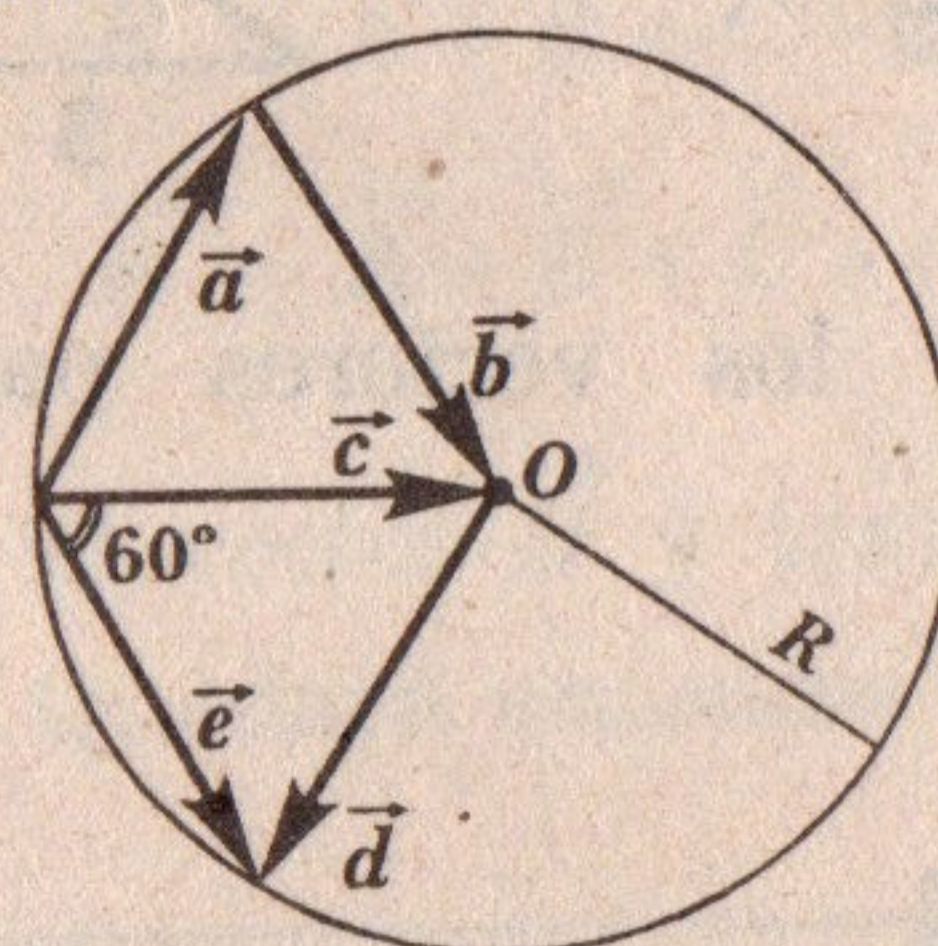
$$m = 3k ; n = 2k ; p = k$$

Luego:  $m + n + p = 6k$

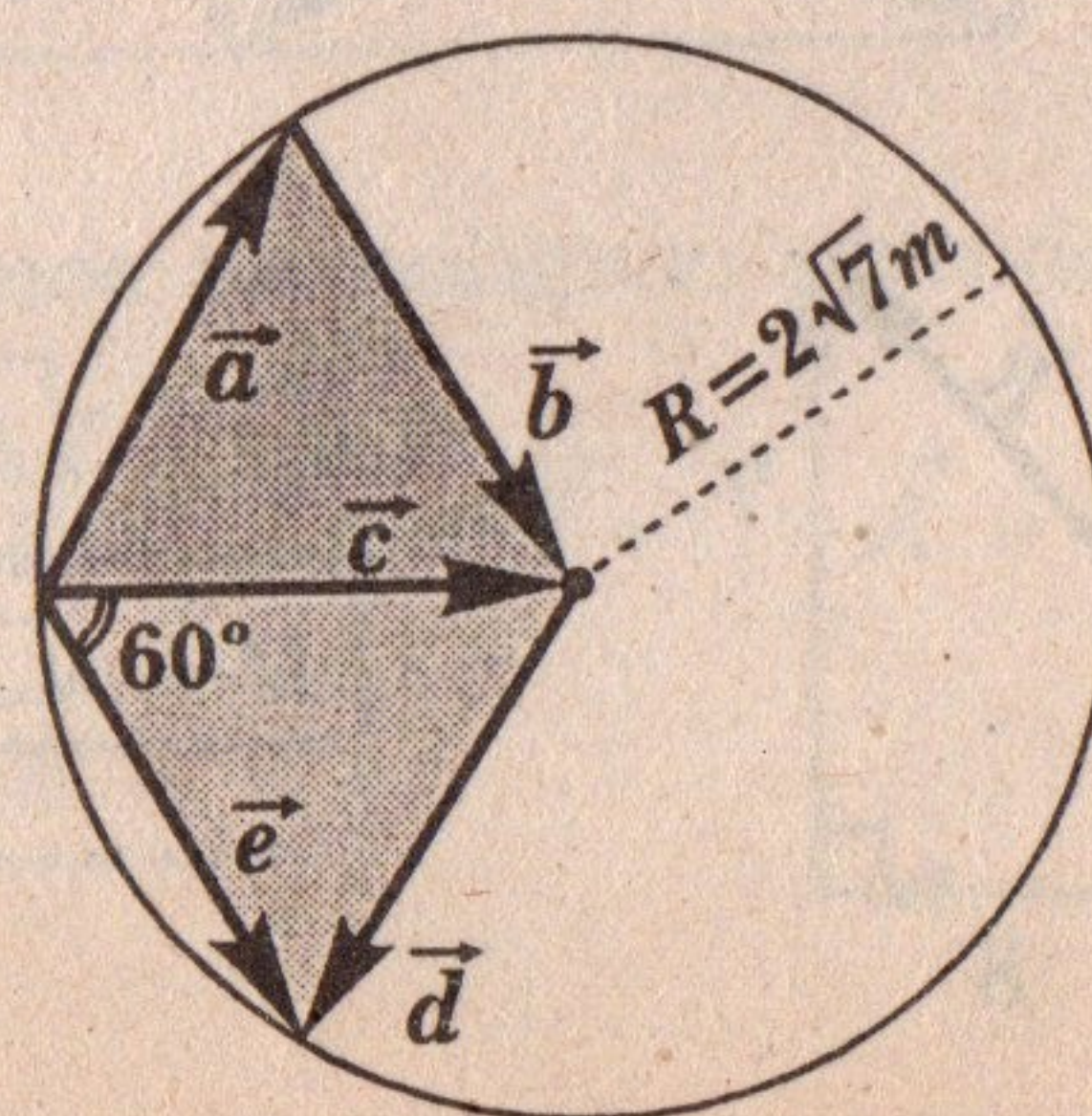
donde:  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

**PROBLEMA N°15**

Hallar el módulo del vector resultante en el sistema de vectores que se muestra en la figura. Sabiendo que el radio de la circunferencia es  $2\sqrt{7} \text{ m}$ .



- A) 14 m    B) 7 m    C)  $\sqrt{70} \text{ m}$   
D) 1,4 m    E)  $2\sqrt{70} \text{ m}$

**RESOLUCIÓN**

Nos piden  $R = ??$

$$\text{Pero : } \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

En la figura :

$$* \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

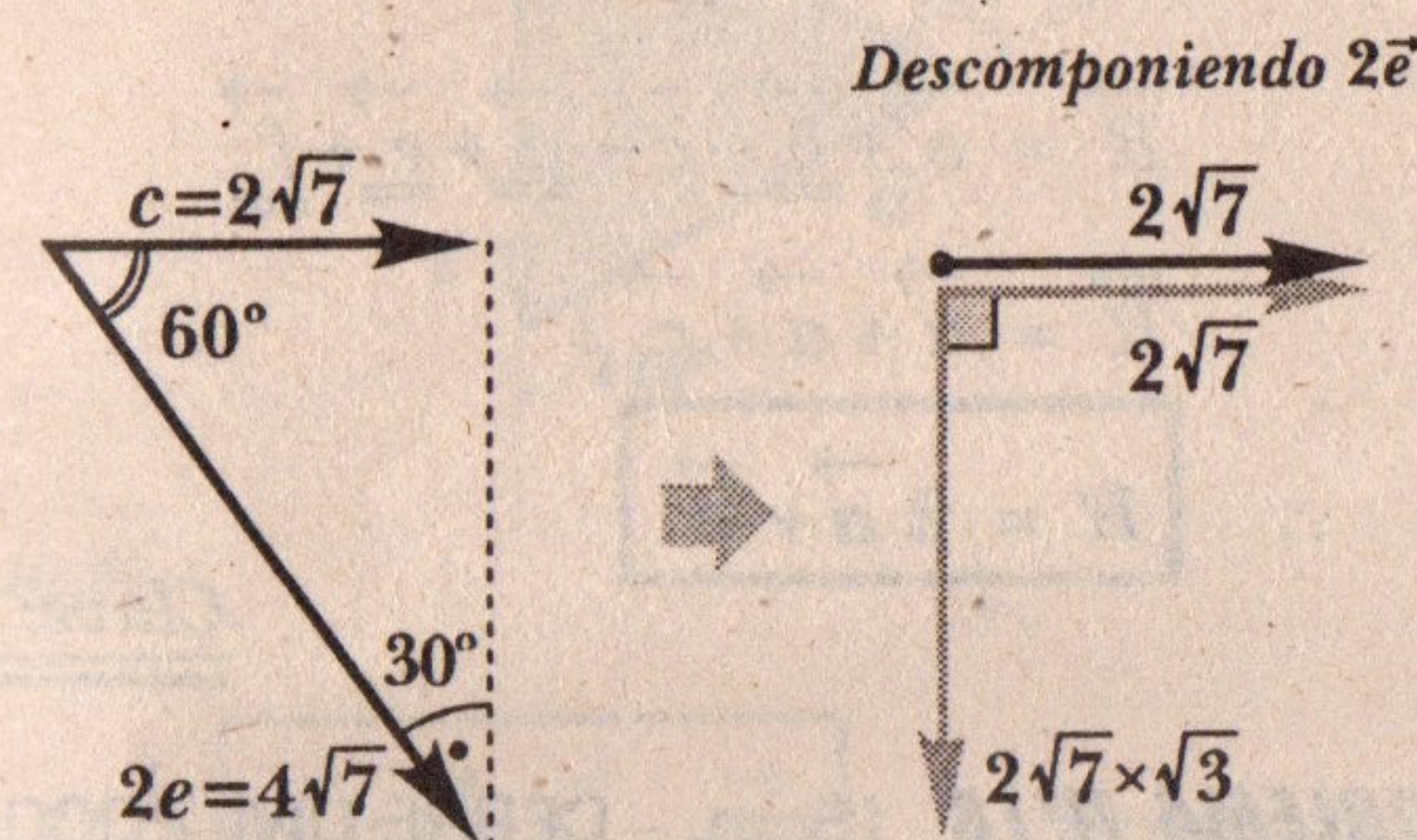
$$* \vec{e} = \vec{c} + \vec{d}$$

Reemplazando en :

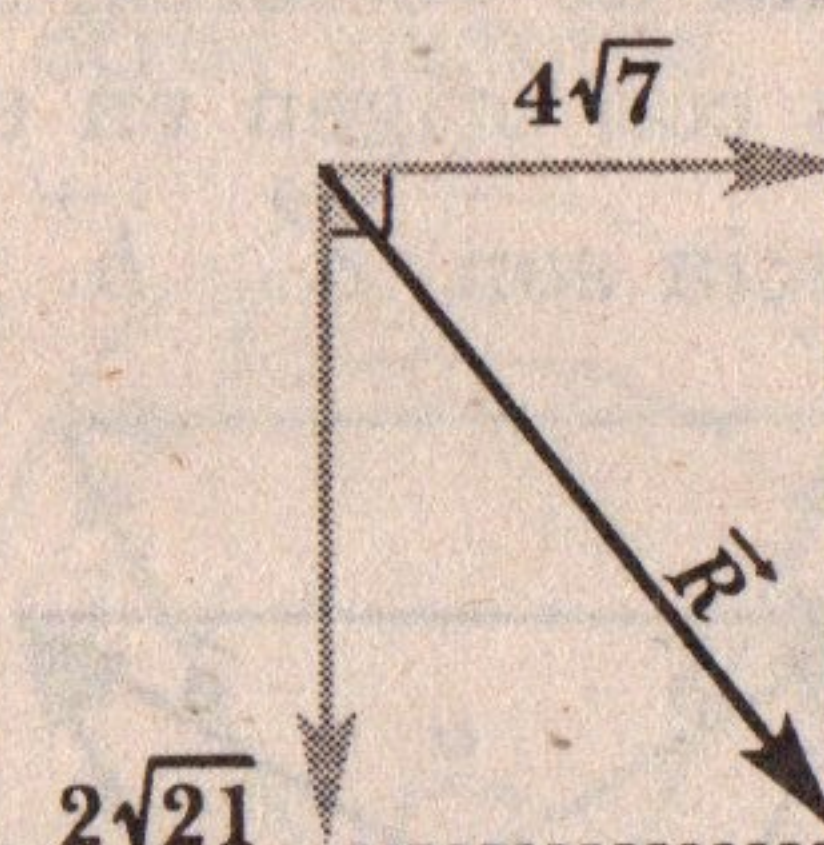
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

$$\vec{R} = \vec{c} + \vec{e} + \vec{e} = \vec{c} + 2\vec{e}$$

La resultante queda :



Quedará :



Por teorema de Pitágoras :

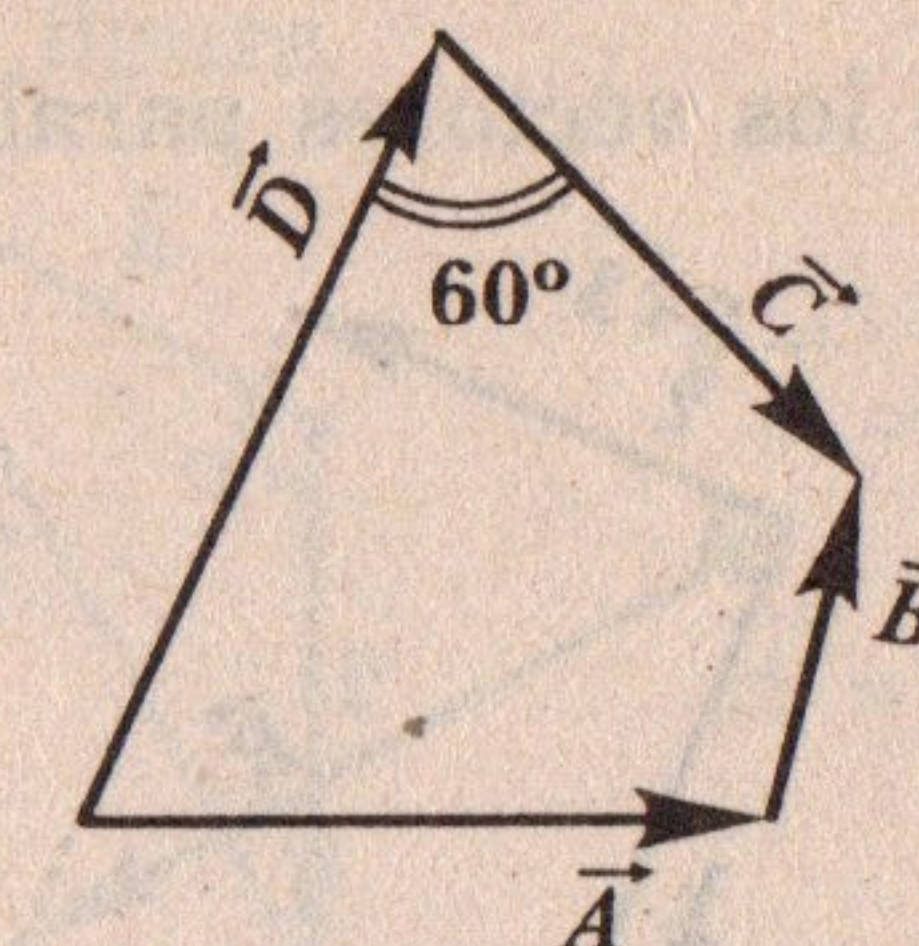
$$R = \sqrt{(4\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{21})^2}$$

$$\therefore R = 14 \text{ m}$$

Clave: A

**PROBLEMA N°16** (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Se muestran los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{D}$ , hallar  $x$  si  $\vec{x} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ ;  $D = 5$ ,  $C = 3$



- A)  $2\sqrt{19}$     B)  $\sqrt{19}$     C)  $\sqrt{19}/2$   
D)  $\sqrt{34}$     E)  $2\sqrt{34}$

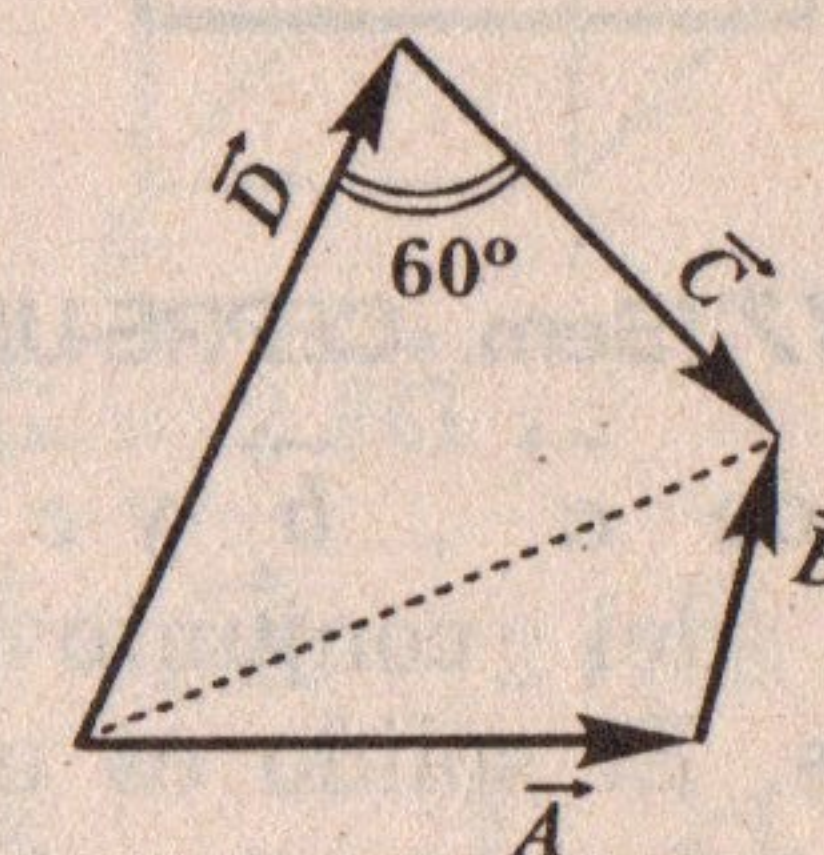
**RESOLUCIÓN**

Piden :  $\vec{x} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = ??$

Dato :  $D = 5$  ,  $C = 3$

\* Buscaremos que la resultante quede en términos de  $\vec{D}$  y  $\vec{C}$ .

En el gráfico :



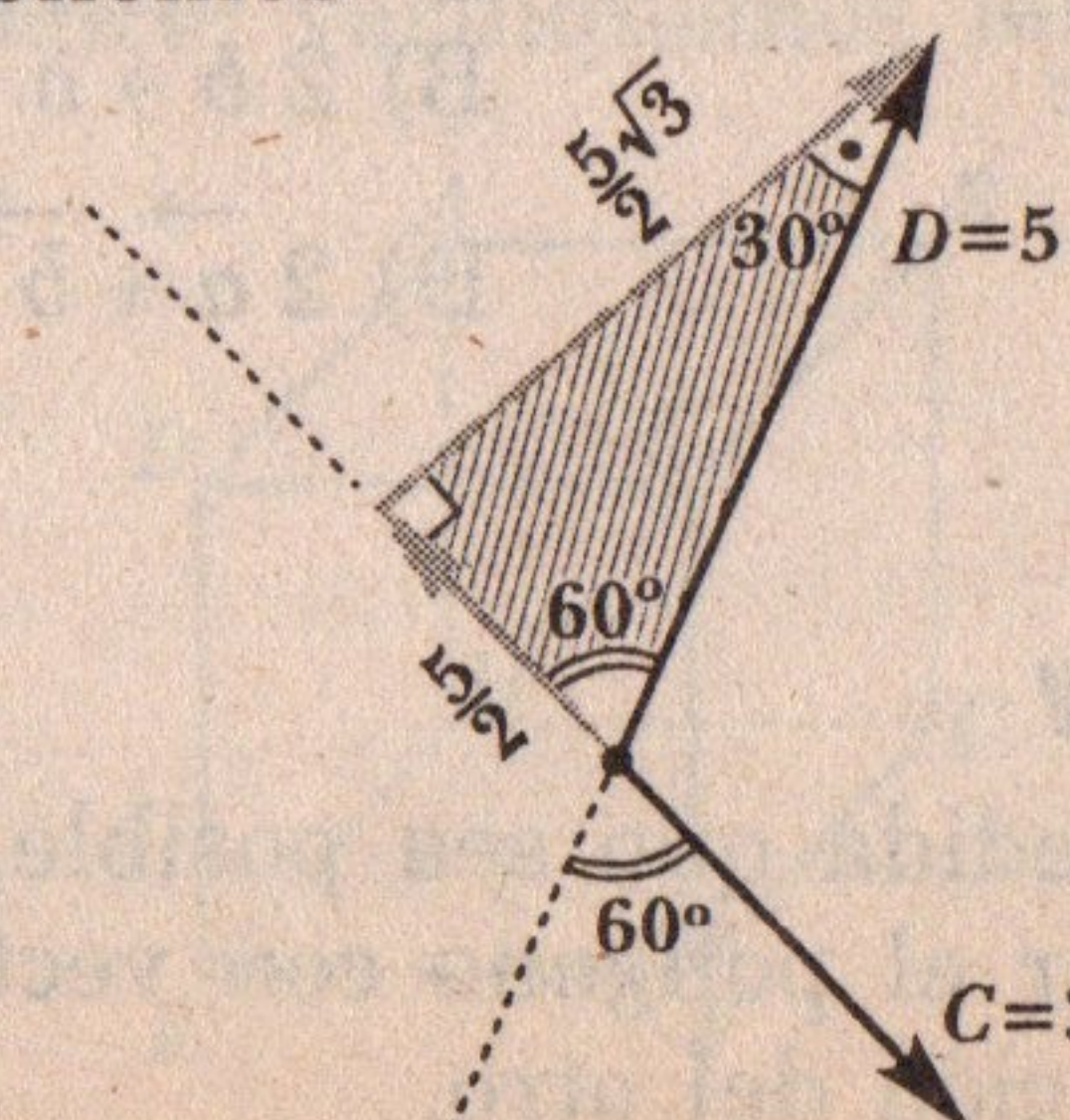
$$\vec{D} + \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Luego :

$$\vec{x} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = 2(\vec{C} + \vec{D})$$

Halleemos  $\vec{D} + \vec{C}$

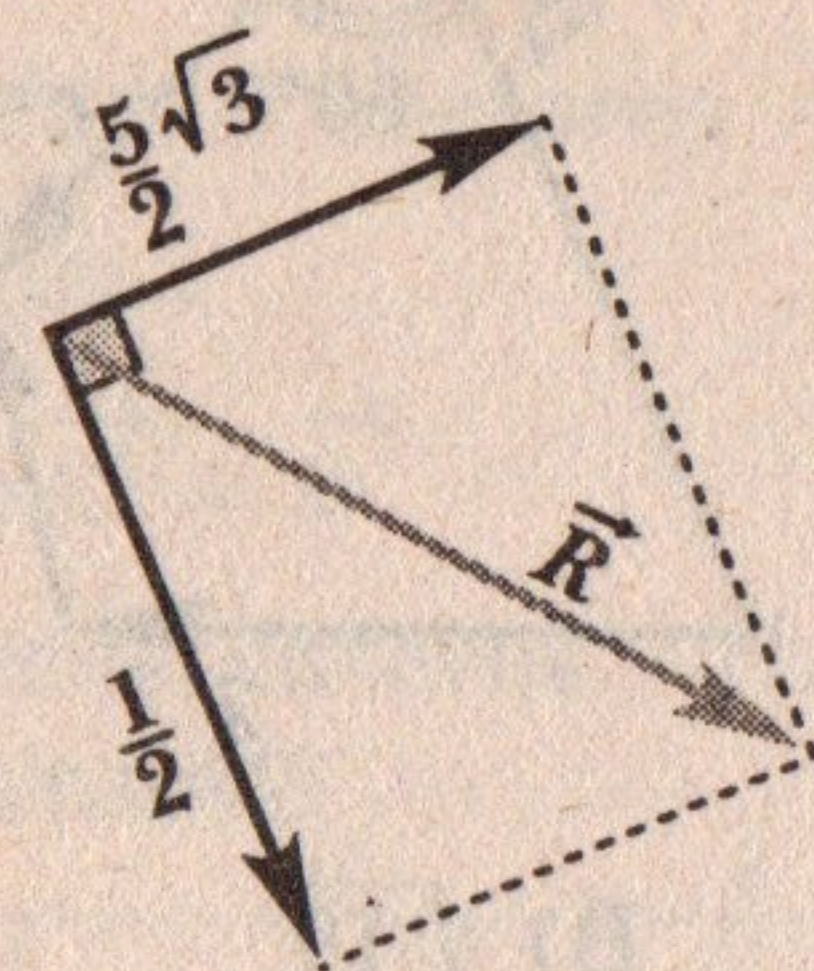
Ubicamos  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$  en un mismo punto y descomponemos  $\vec{D}$ .





\* Sumamos los vectores paralelos

Queda :



$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{19}$$

Pero :

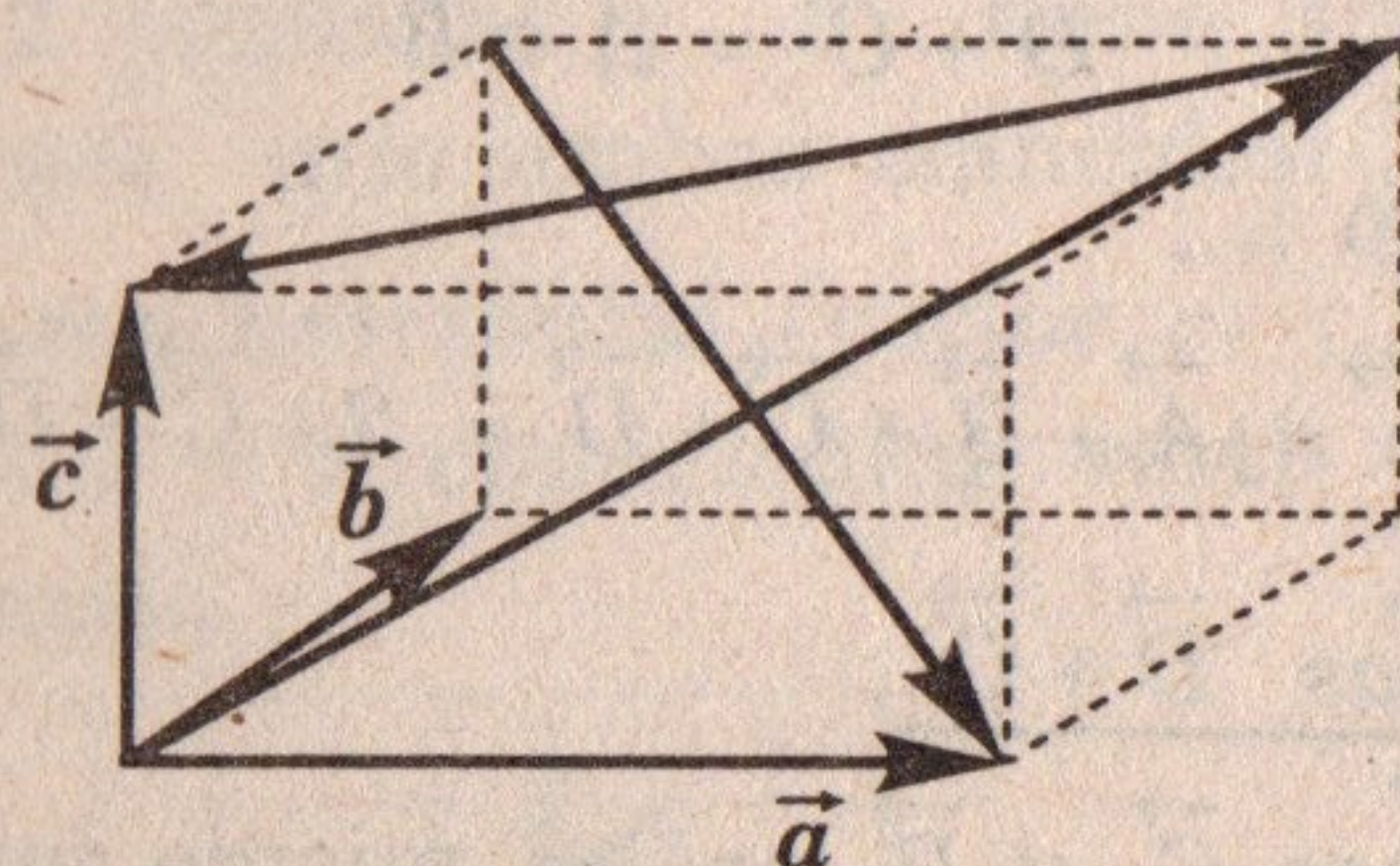
$$|\vec{x}| = 2 |\vec{D} + \vec{C}|$$

$$\therefore \boxed{x = 2\sqrt{19}}$$

Clave: A

**PROBLEMA N°17** (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

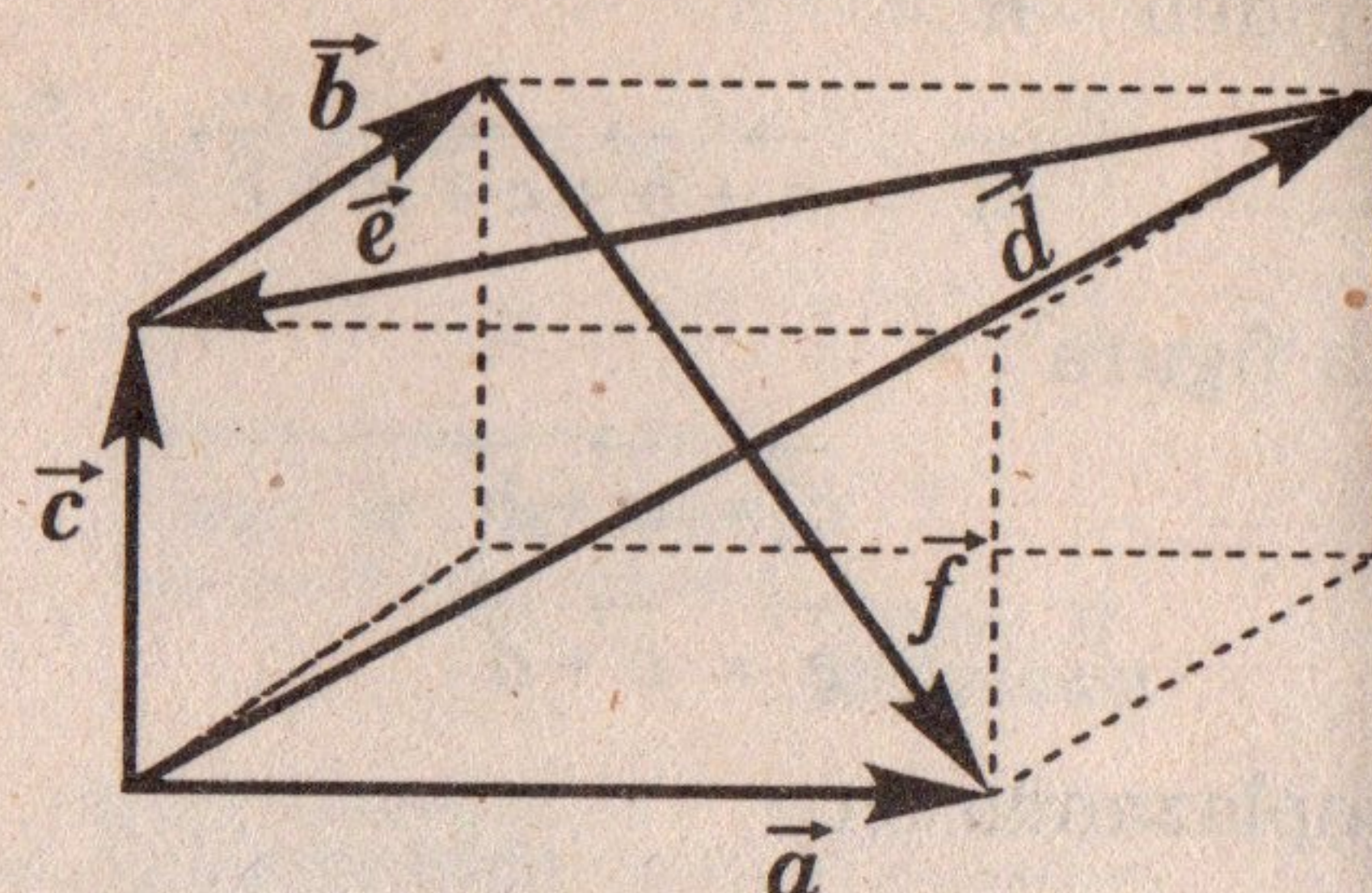
En términos de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  determine la resultante del conjunto de vectores mostrados. El sólido es un paralelepípedo rectangular.



- |                                  |                         |
|----------------------------------|-------------------------|
| A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ | B) $2\vec{b} + \vec{a}$ |
| C) $2\vec{c} + \vec{a}$          | D) $2\vec{a} + \vec{b}$ |
| E) $2\vec{a} + \vec{c}$          |                         |

**RESOLUCIÓN**

En la medida que sea posible, intentamos formar el polígono con vectores uno a continuación del otro.



En la figura

$$\vec{a} = \vec{d} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{f}$$

La resultante :

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$$

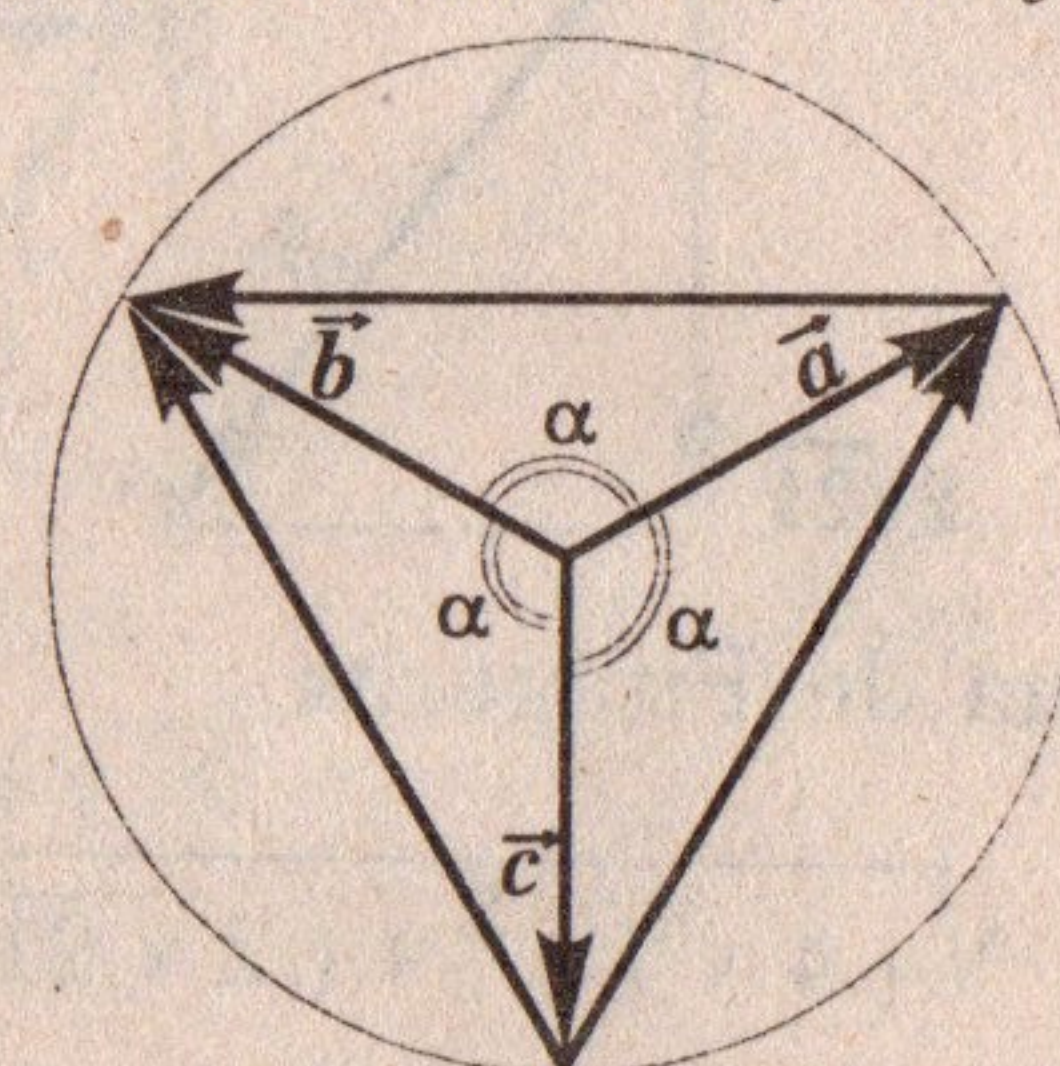
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{c}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = 2\vec{a} + \vec{c}}$$

Clave: E

**PROBLEMA N°18** (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Hallar la suma de vectores, si  $\alpha = 120^\circ$  y los vectores con origen en el centro de la circunferencia son  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ .

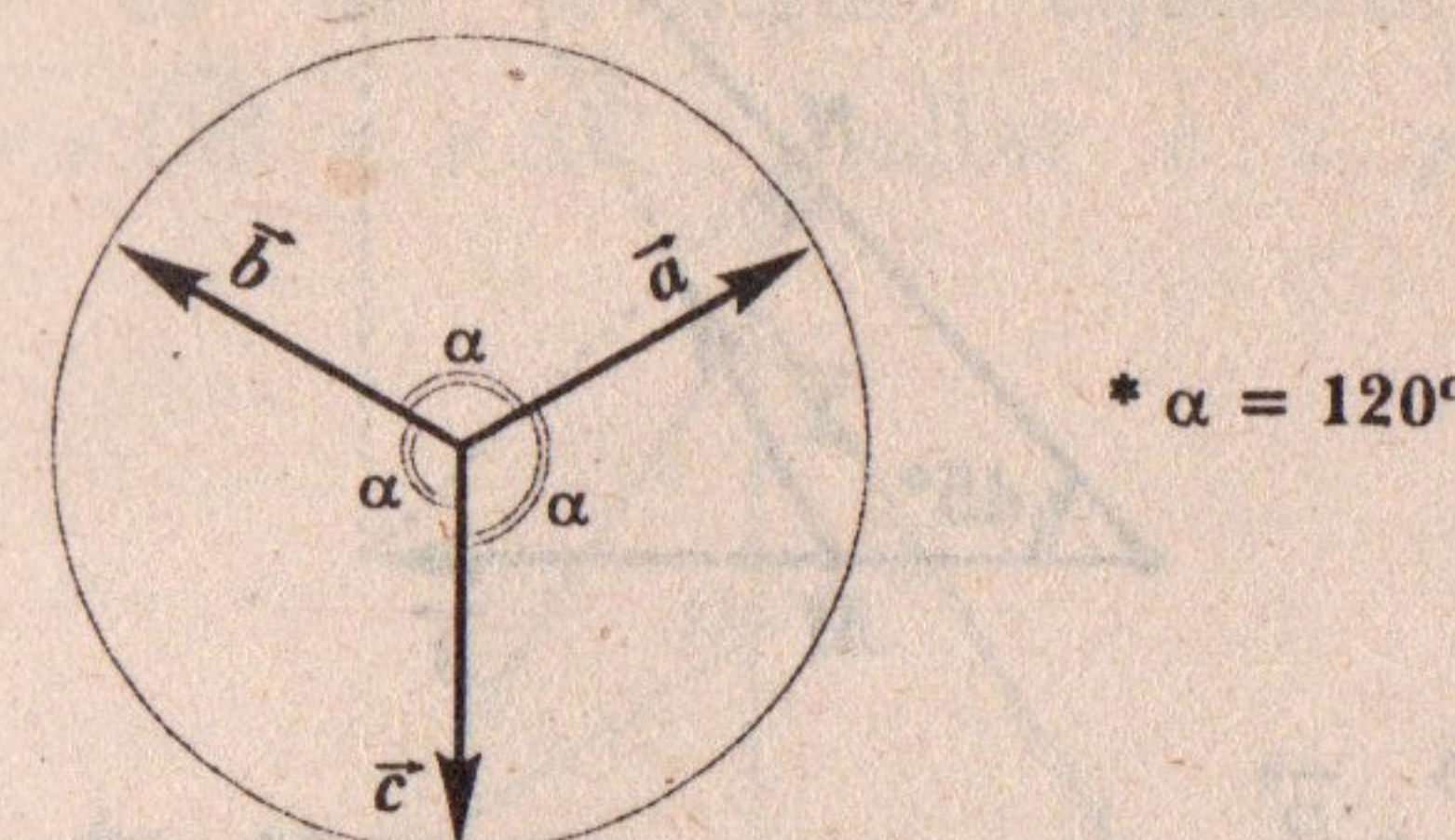


- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ | B) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ |
| C) $\vec{b} - \vec{c}$           | D) $2(\vec{b} - \vec{c})$        |
| E) $\frac{\vec{b} - \vec{c}}{2}$ |                                  |

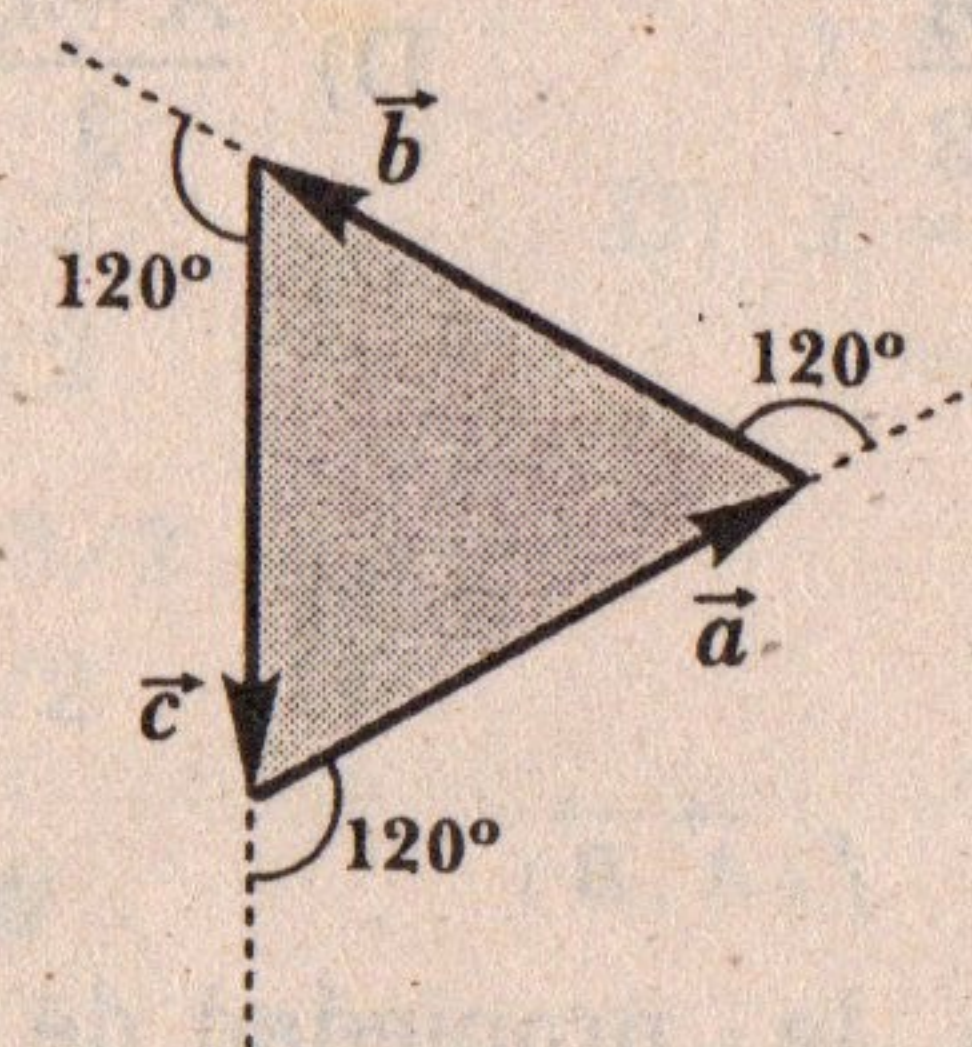
**RESOLUCIÓN**

Para hallar la suma de todos los vec-

tores, calculamos primero la suma de vectores  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .



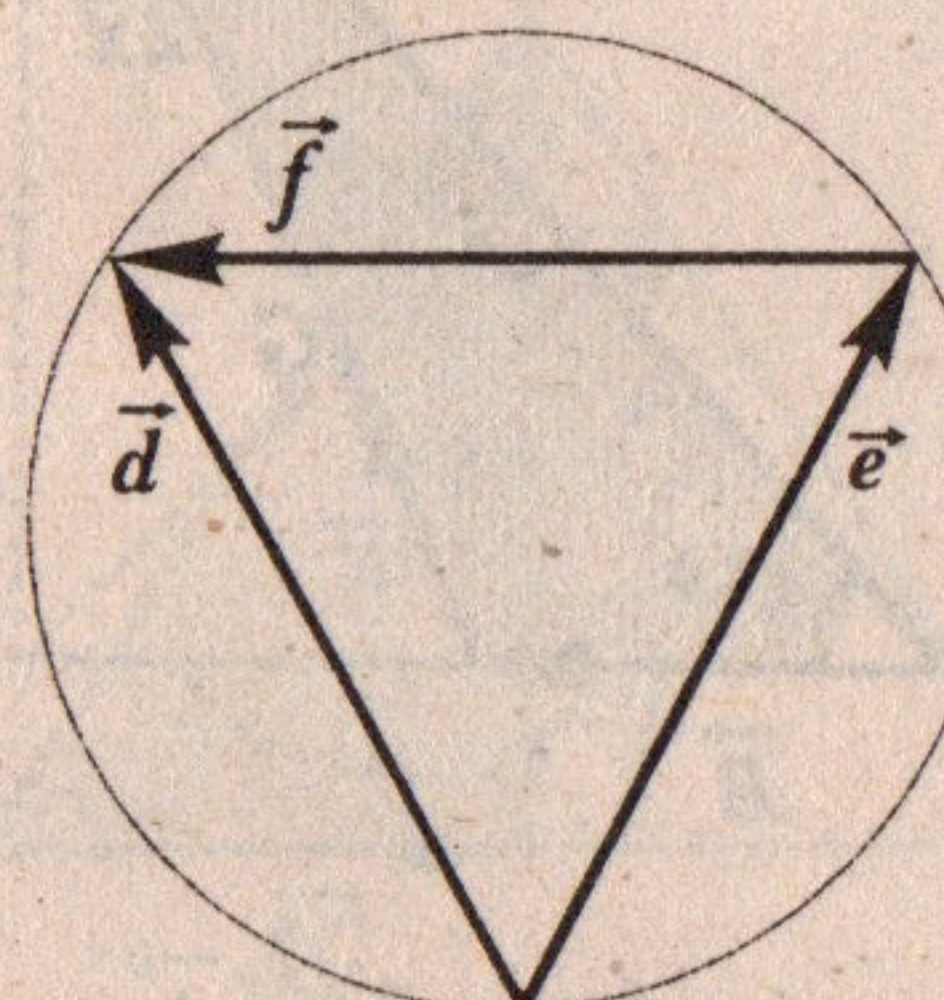
Ubicando vectores uno a continuación del otro.



Luego :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{¡¡Propiedad!!}$$

Quedan los otros vectores.



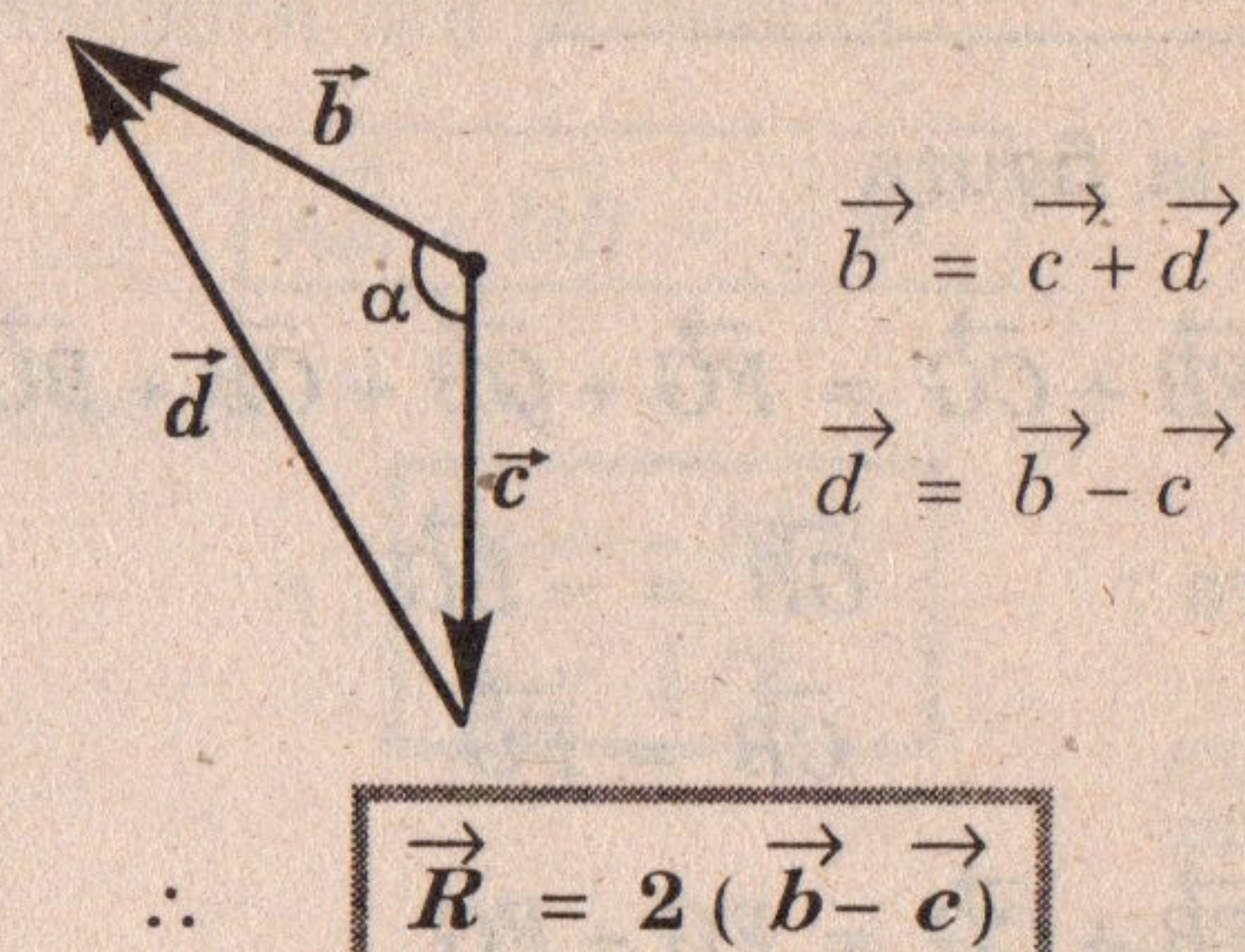
$$\text{Luego : } \vec{d} = \vec{e} + \vec{f}$$

Finalmente :

$$\vec{R} = \underbrace{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}_0 + \underbrace{\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}_d$$

$$\vec{R} = 2\vec{d}$$

Pero en la figura :



$$\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

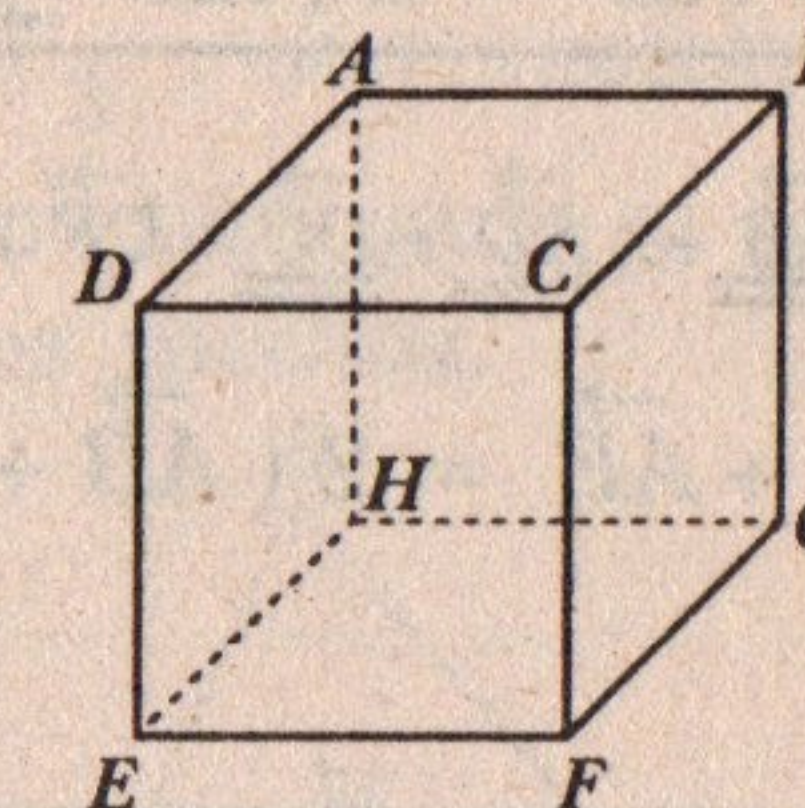
$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = 2(\vec{b} - \vec{c})}$$

Clave: D

**PROBLEMA N°19**

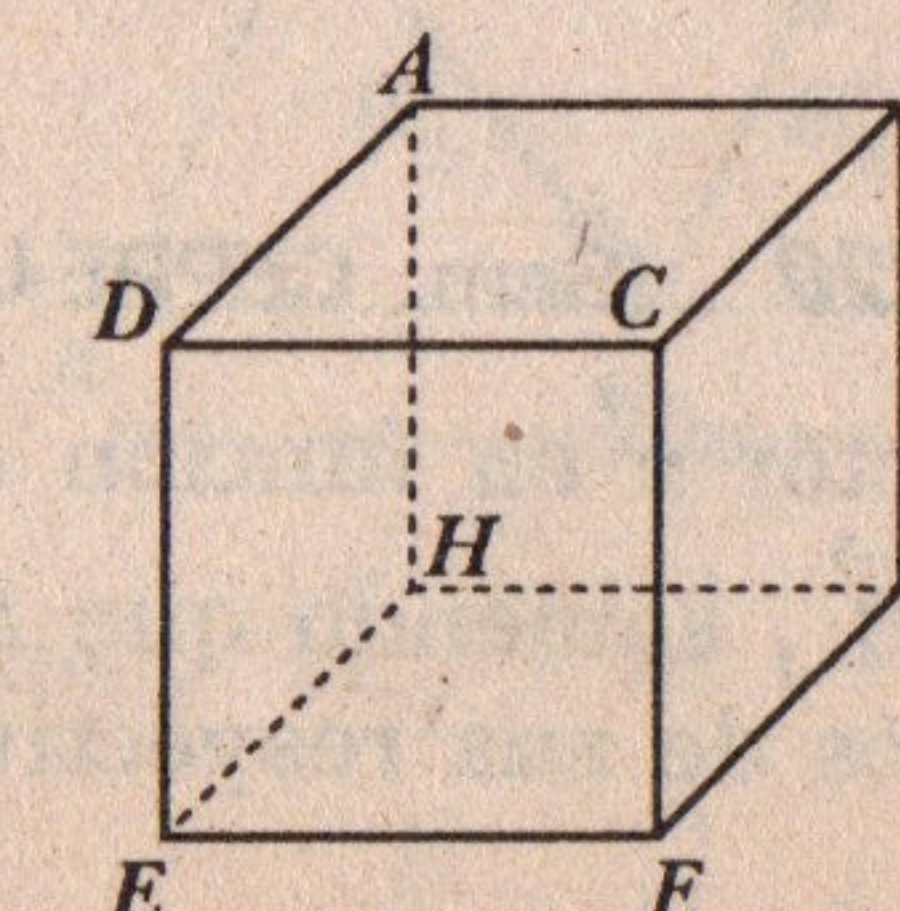
En la figura cúbica siguiente se establecen las siguientes sumas vectoriales.



- I)  $\vec{FB} + \vec{CG} = 2\vec{FG}$
  - II)  $\vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AE} = 2(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AH})$
  - III)  $\vec{AF} + \vec{DG} = 2(\vec{AB} + \vec{BG})$
- A) Sólo I y II son correctas.  
 B) Sólo I y III son correctas.  
 C) Todas son correctas.  
 D) Sólo II y III son correctas.  
 E) Sólo I es correcta.

**RESOLUCIÓN**

En el gráfico, verifiquemos las expresiones :





I)  $\vec{FB} + \vec{CG} = 2\vec{FG}$

En la figura :

$$\vec{FB} + \vec{CG} = \vec{FG} + \vec{GB} + \vec{CG} + \vec{CB} + \vec{BG}$$

Pero :  $\vec{GB} = -\vec{BG}$

$$\vec{CB} = \vec{FG}$$

$$\vec{FB} + \vec{CG} = \vec{FG} + \vec{FG}$$

$$\therefore \vec{FB} + \vec{CG} = 2\vec{FG}$$

¡Verdadera!

II)  $\vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AE} = 2(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AH})$

$$\vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AE} = \vec{AB} + (\vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF}) + (\vec{AD} + \vec{DE})$$

$$\therefore \vec{AB} + \vec{AF} + \vec{AE} = 2(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AH})$$

¡Verdadera!

III)  $\vec{AF} + \vec{DG} = 2(\vec{AB} + \vec{BG})$

En la figura :

$$\vec{AF} + \vec{DG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CF} + \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BG}$$

$$\vec{AF} + \vec{DG} = (\vec{AB} + \vec{BG}) + (\vec{AB} + \vec{BG})$$

$$\therefore \vec{AF} + \vec{DG} = 2(\vec{AB} + \vec{BG})$$

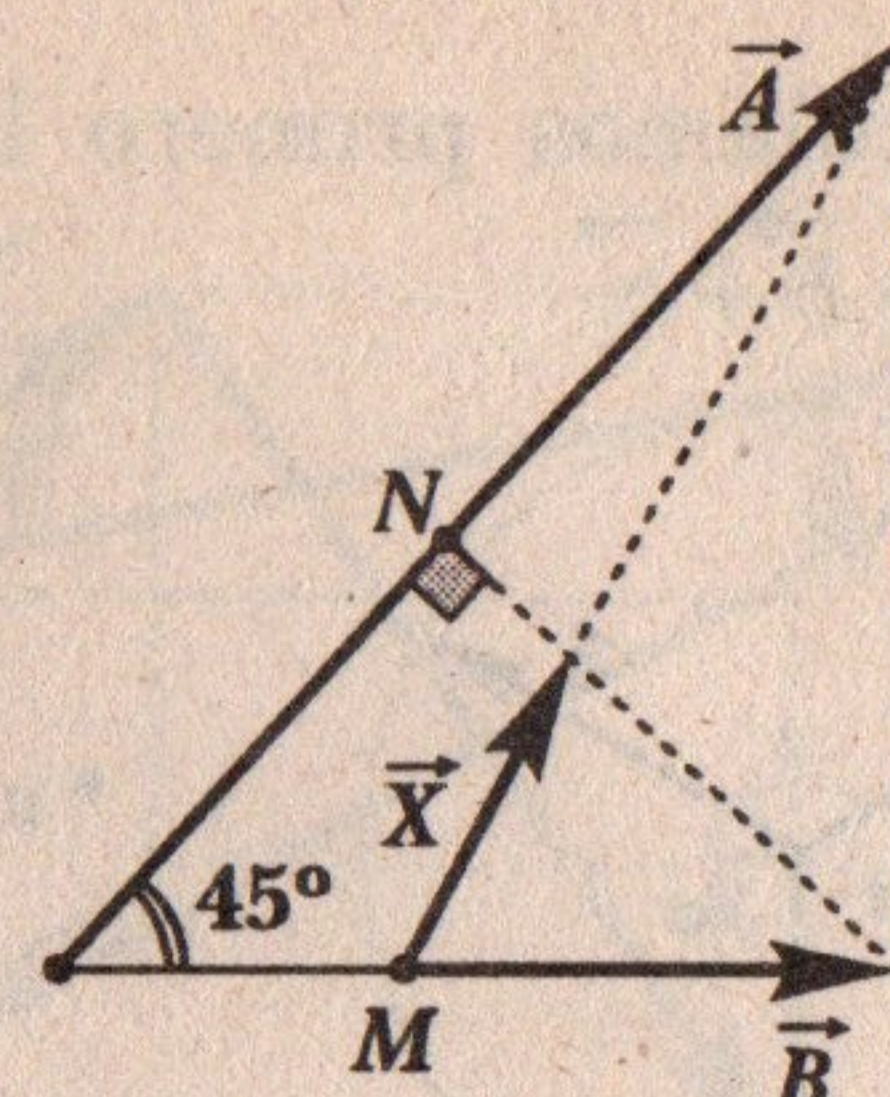
¡Verdadera!

∴ **Todas son correctas**

Clave: C

**PROBLEMA N°20** (Sem. CEPRE-UNI 98-II)

Hallar el vector  $\vec{x}$  en función de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , sabiendo que M y N son puntos medios de sus respectivos lados.



A)  $\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$

B)  $\frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B})$

C)  $-\frac{\vec{A}}{3} + \frac{\vec{B}}{3}$

D)  $\frac{\vec{A} - \vec{B}}{3}$

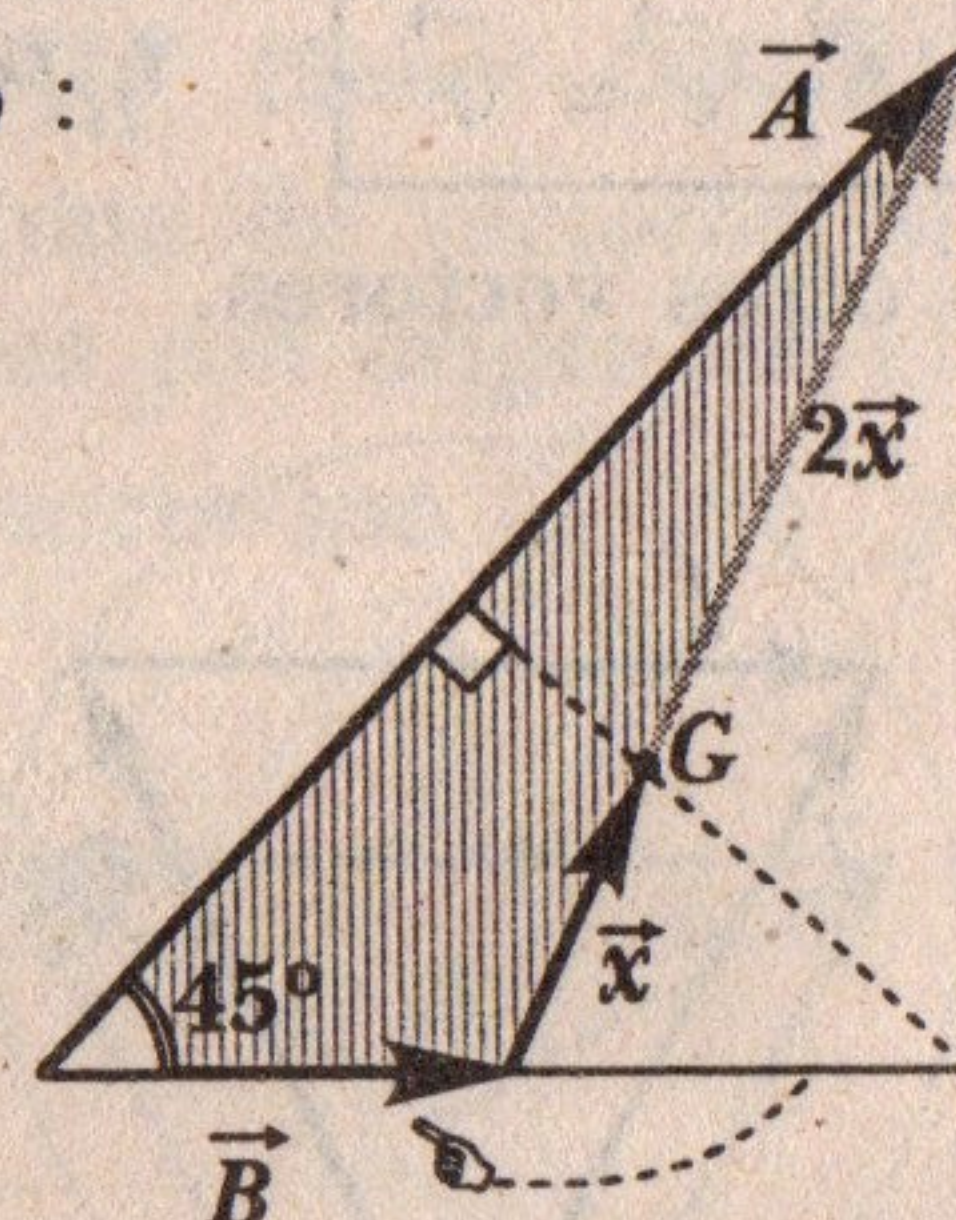
E)  $\frac{\vec{A}}{3} - \frac{\vec{B}}{6}$

**RESOLUCIÓN**

Piden  $\vec{x}$  :  $f(\vec{A}, \vec{B})$

Recordando la propiedad de baricentro (G) dado que es punto de intersección de medianas.

Del gráfico :



En la región sombreada  $\vec{A} = \vec{B} + 3\vec{x}$

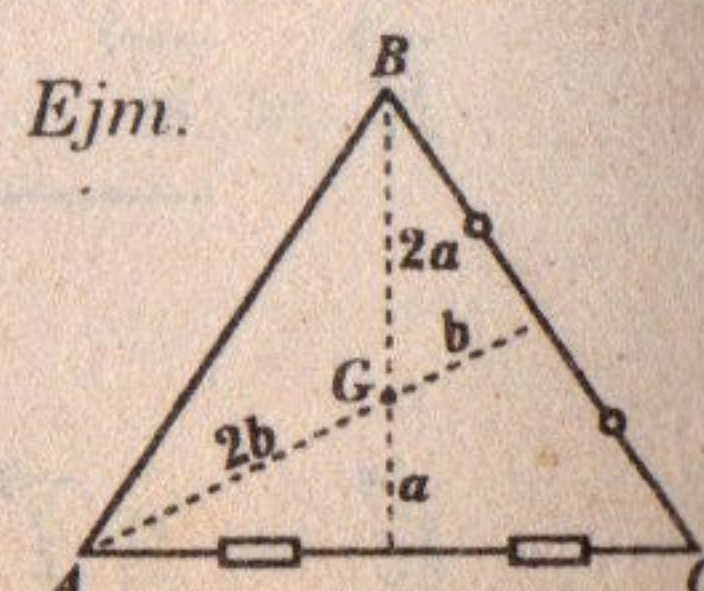
$$\therefore \vec{x} = \frac{\vec{A} - \vec{B}}{3}$$

Clave: D

**Nota:**

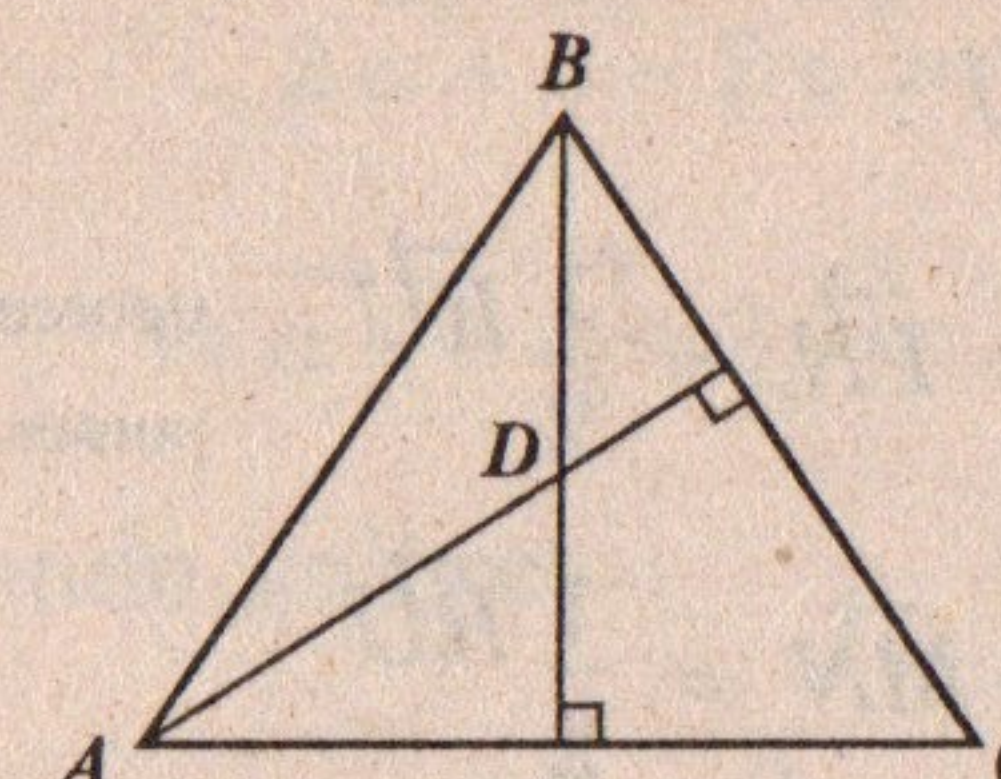
Propiedad del Baricentro (G) Ejm.

"G" divide a la mediana en segmentos proporcionales a 1 y 2.



**PROBLEMA N°21** (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

ABC es un triángulo equilátero. Si  $\vec{AB} + x\vec{DB} = y\vec{AC}$ , hallar x e y.



A)  $x = 1/2$   
 $y = 1/2$

B)  $x = 1/2$   
 $y = 3/2$

C)  $x = 3/2$   
 $y = 1/2$

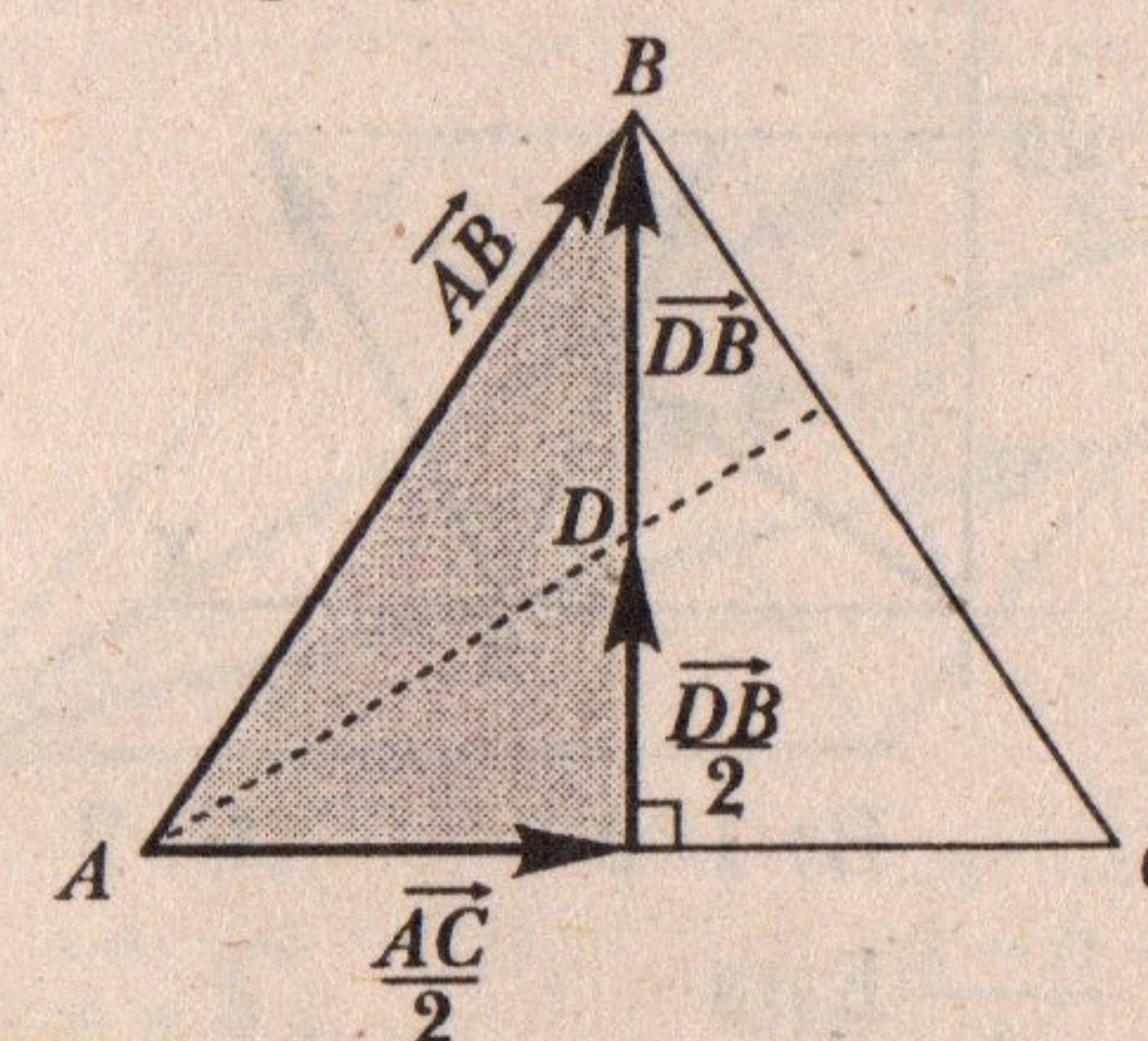
D)  $x = -1/2$   
 $y = 3/2$

E)  $x = -3/2$   
 $y = 1/2$

**RESOLUCIÓN**

\* Buscamos ubicar vectores uno a continuación del otro, con vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{DB}$  y  $\vec{AC}$ .

\* Recordar propiedad del baricentro "D"



En la figura :

$$\vec{AB} = \frac{\vec{AC}}{2} + \frac{\vec{DB}}{2} + \vec{DB}$$

$$\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{DB} = \frac{\vec{AC}}{2}$$

$$\vec{AB} + \left(-\frac{3}{2}\right)\vec{DB} = \left(\frac{1}{2}\right)\vec{AC}$$

Por condición del problema

$$\vec{AB} + \vec{DB} = y\vec{AC}$$

Comparando :

$$\therefore \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

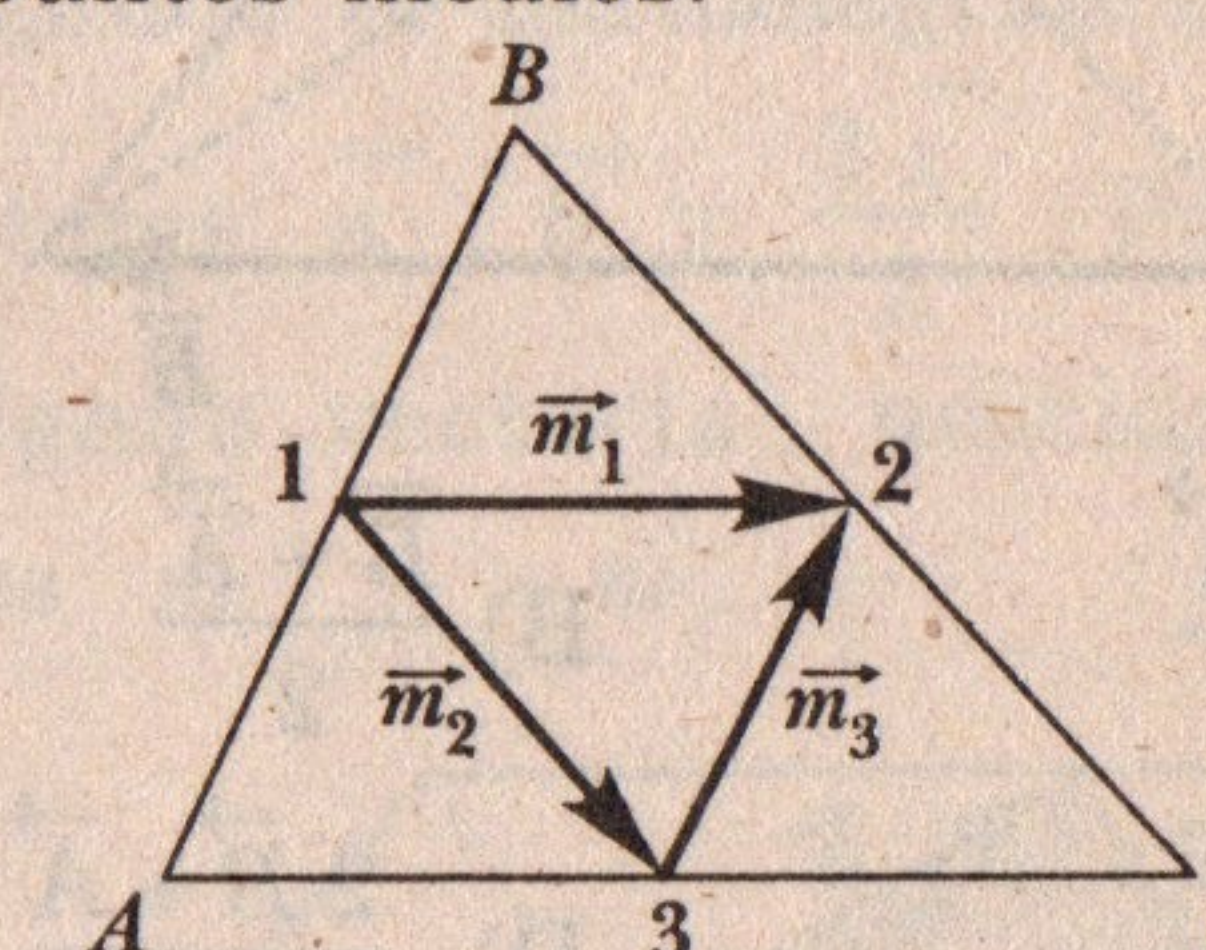
Clave: E

**PROBLEMA N°22** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

En el sistema de vectores mostrados, determine la magnitud de  $\vec{R}$ , si :

$$\vec{R} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 \text{ y } AC = 20u.$$

$\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$  : son vectores paralelos a los lados del triángulo y además 1, 2 y 3 son puntos medios.



A) 5 u

B) 20 u

C) 10 u

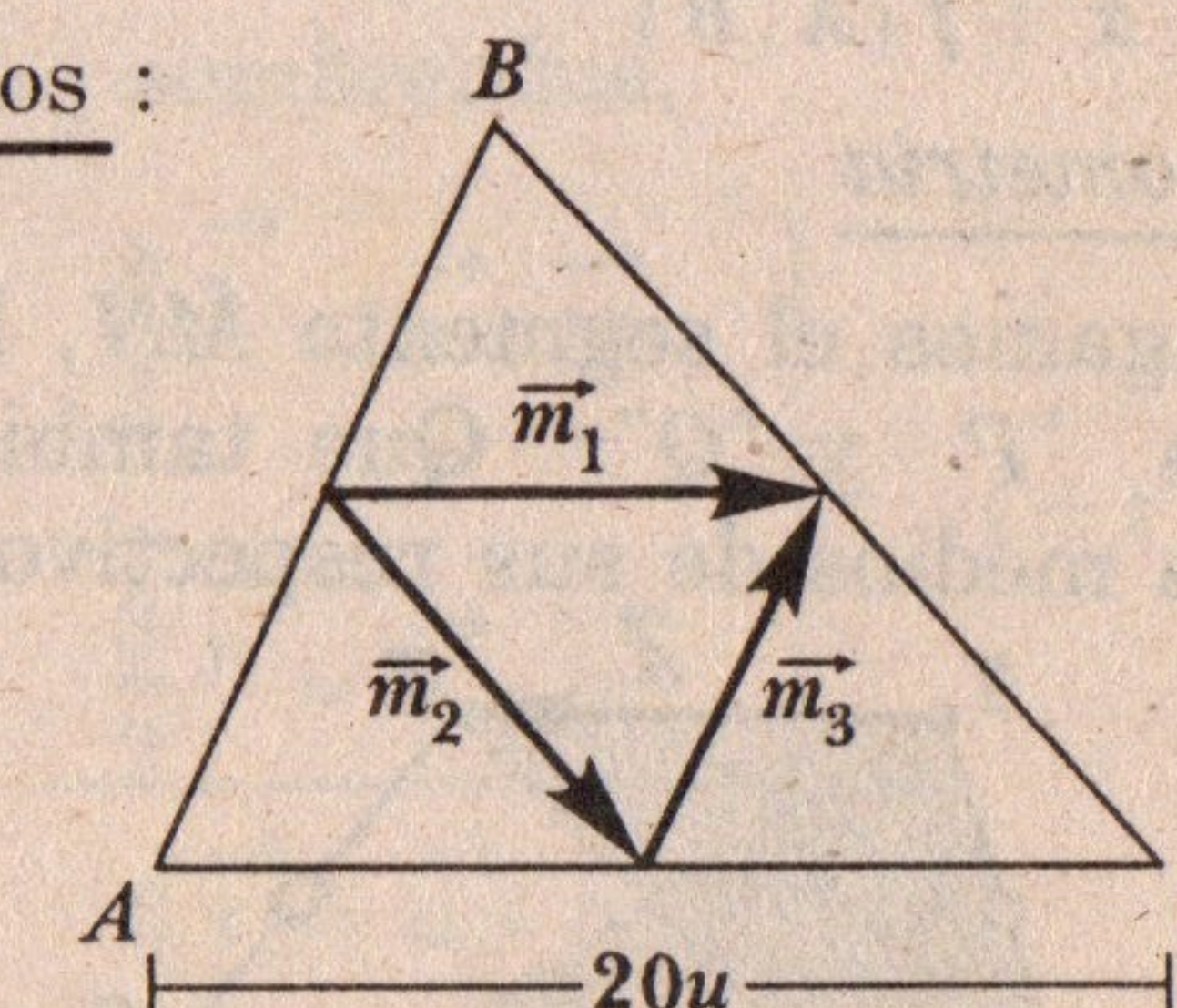
D) 15 u

E) 40 u

**RESOLUCIÓN**

Piden  $R = ??$  ,  $\vec{R} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3$

Dibujamos :



Observamos :  $\vec{m}_1 = \vec{m}_2 + \vec{m}_3$

Luego :  $\vec{R} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3$



$$\vec{R} = 2\vec{m}_1$$

Pero :  $m_1 = \frac{AC}{2} \Rightarrow m_1 = 10u$

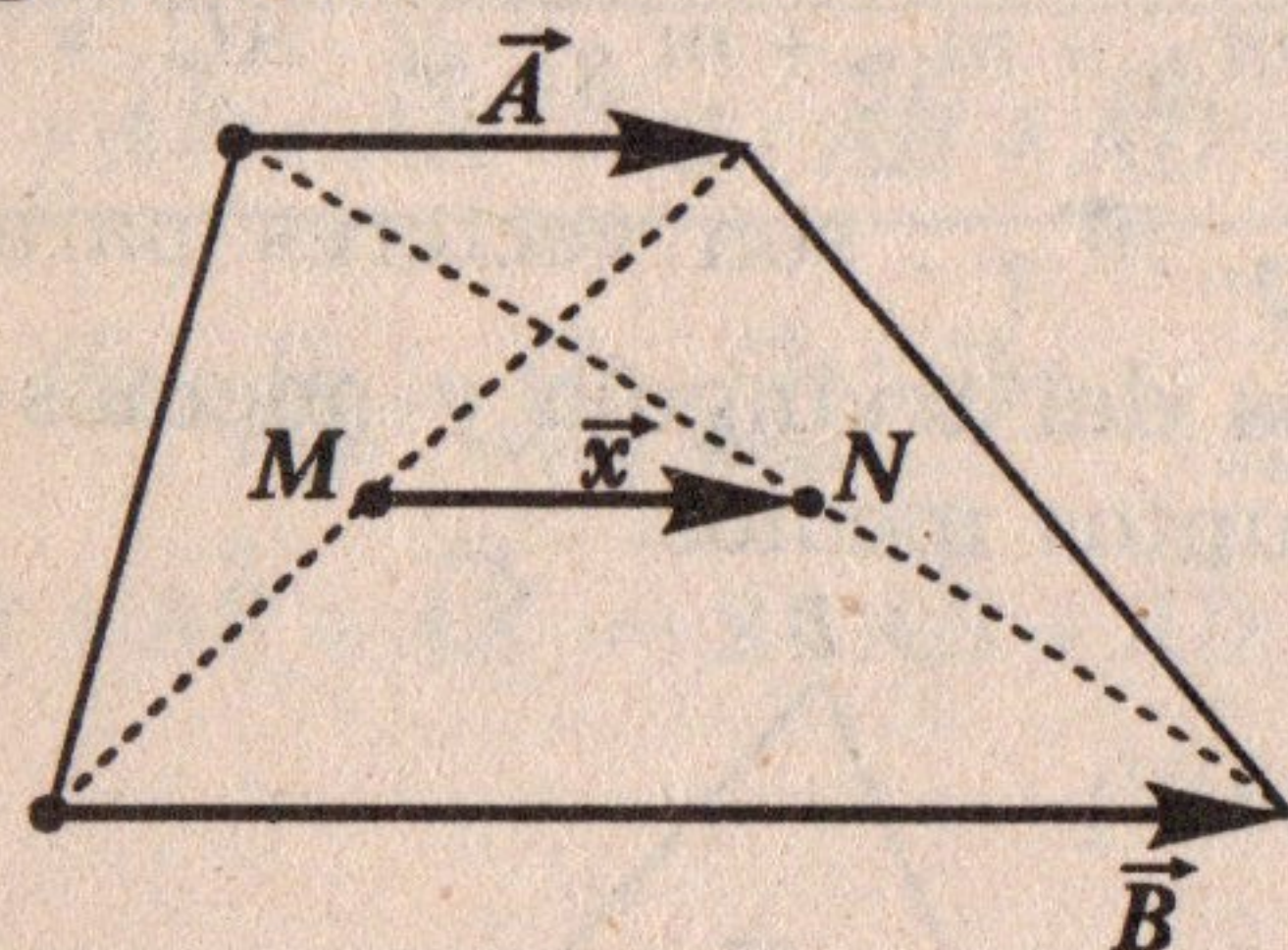
$$R = 2 \times 10$$

$$\therefore \boxed{R = 20u}$$

Clave: B

**PROBLEMA 23**

En la figura hallar  $\vec{x}$  en función de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , si M y N son puntos medios de las diagonales.



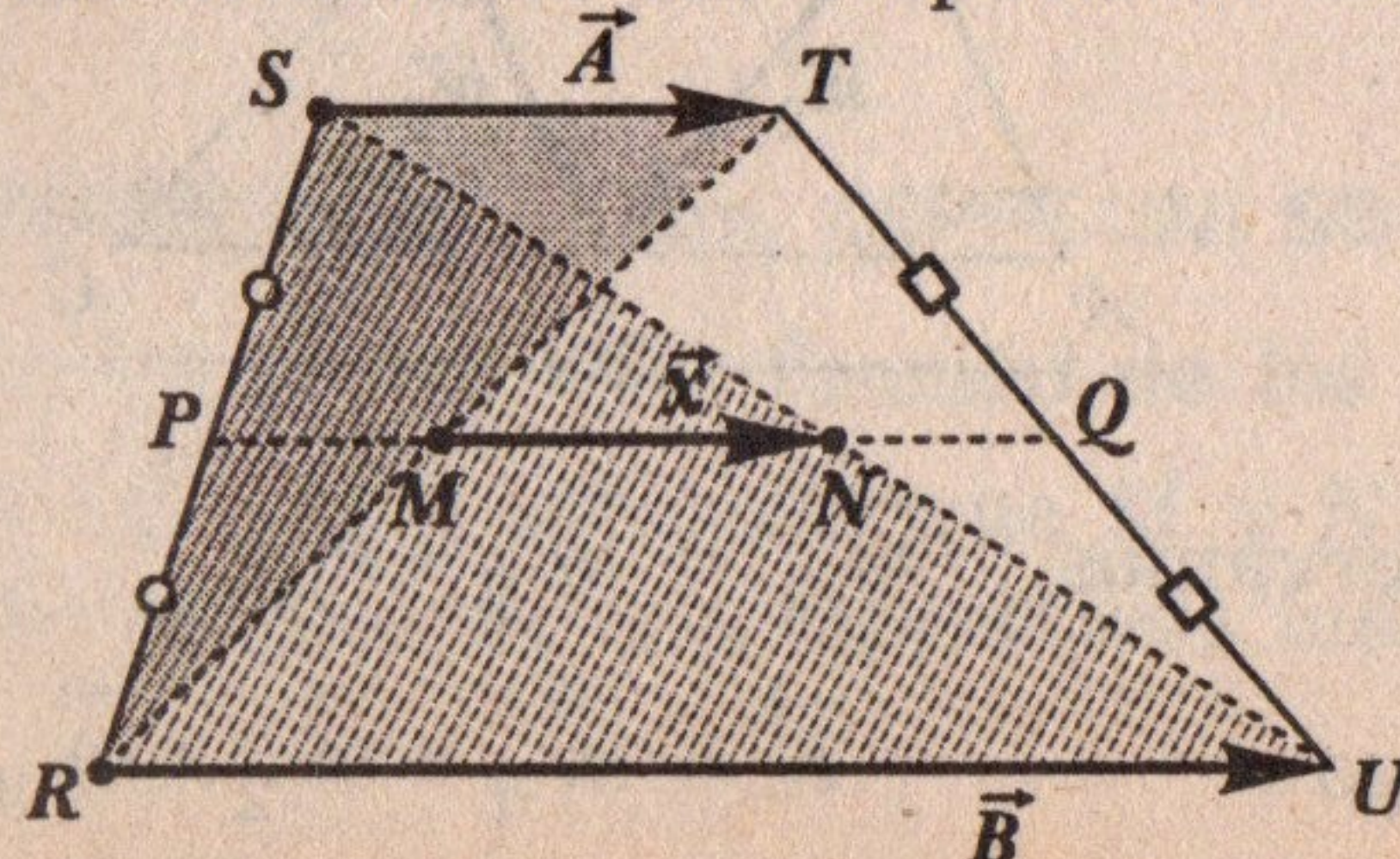
- A)  $\frac{\vec{B} + 2\vec{A}}{2}$  B)  $\frac{\vec{B} + \vec{A}}{2}$   
C)  $\frac{\vec{B} - \vec{A}}{2}$  D)  $\frac{2\vec{B} + \vec{A}}{2}$   
E)  $\frac{\vec{B} - \vec{A}}{4}$

**RESOLUCIÓN**

Piden  $\vec{x} : f(\vec{A}, \vec{B})$

Por geometría

Prolongamos el segmento MN, hasta los puntos "P" y "Q". Que también serán puntos medios de sus respectivos lados.



En el  $\Delta RST$  :

$$\vec{PM} = \vec{A}/2 \quad (\text{Teorema de los puntos medios})$$

En el  $\Delta RSU$  :

$$\vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{RU} \quad (\text{teorema de los puntos medios})$$

$$\vec{PM} + \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{RU}$$

$$\frac{\vec{A}}{2} + \vec{x} = \frac{\vec{B}}{2}$$

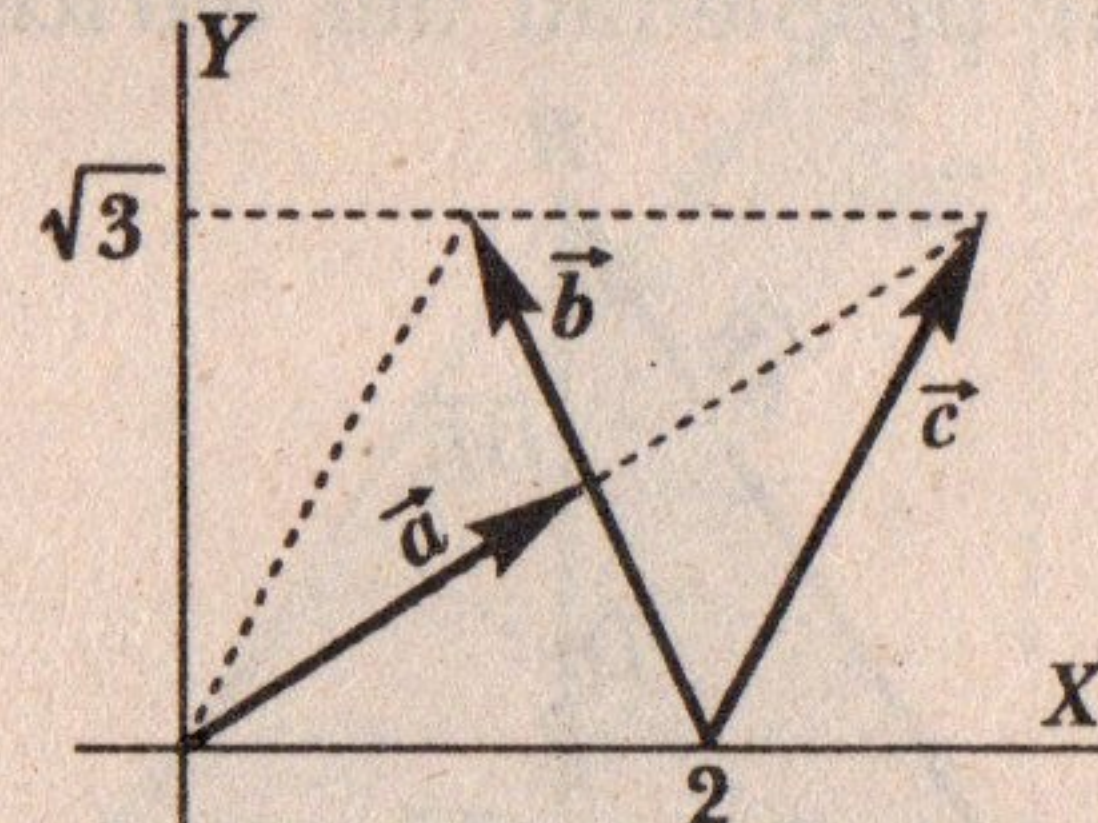
$$\therefore \boxed{\vec{x} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2}}$$

Clave: C

**PROBLEMA 24** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  se encuentran sobre el paralelogramo de lados iguales, como indica la figura. Determine el valor del cociente  $(m/n)$  tal que :

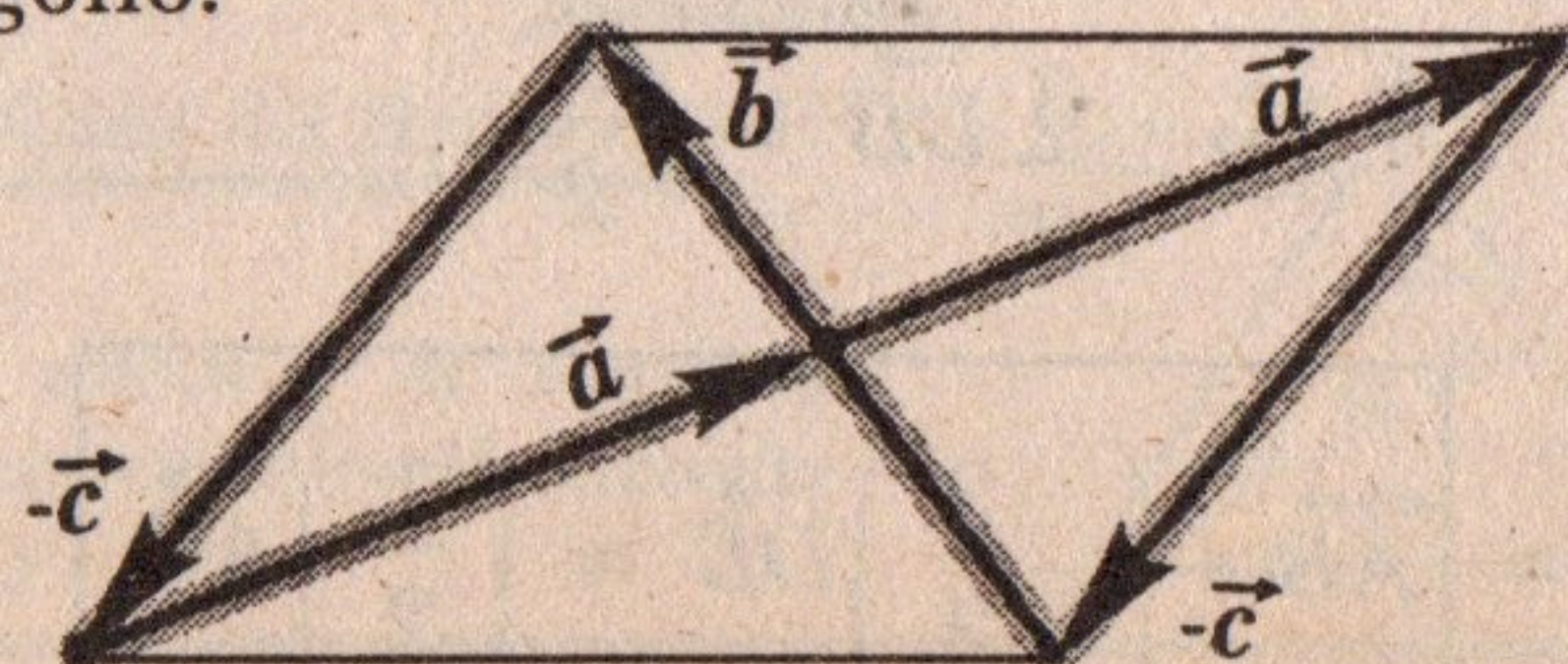
$$m\vec{a} + n\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$$



- A) 1 B) 1/2 C) 2  
D) 1/4 E) 4

**RESOLUCIÓN**

Dibujamos el paralelogramo y con los vectores buscaremos ubicarlos en un polígono.



Siguiendo la polygonal.

$$\vec{a} + \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

$$2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$$

Si :  $m\vec{a} + n\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$

Reconociendo valores :

$$m = 2$$

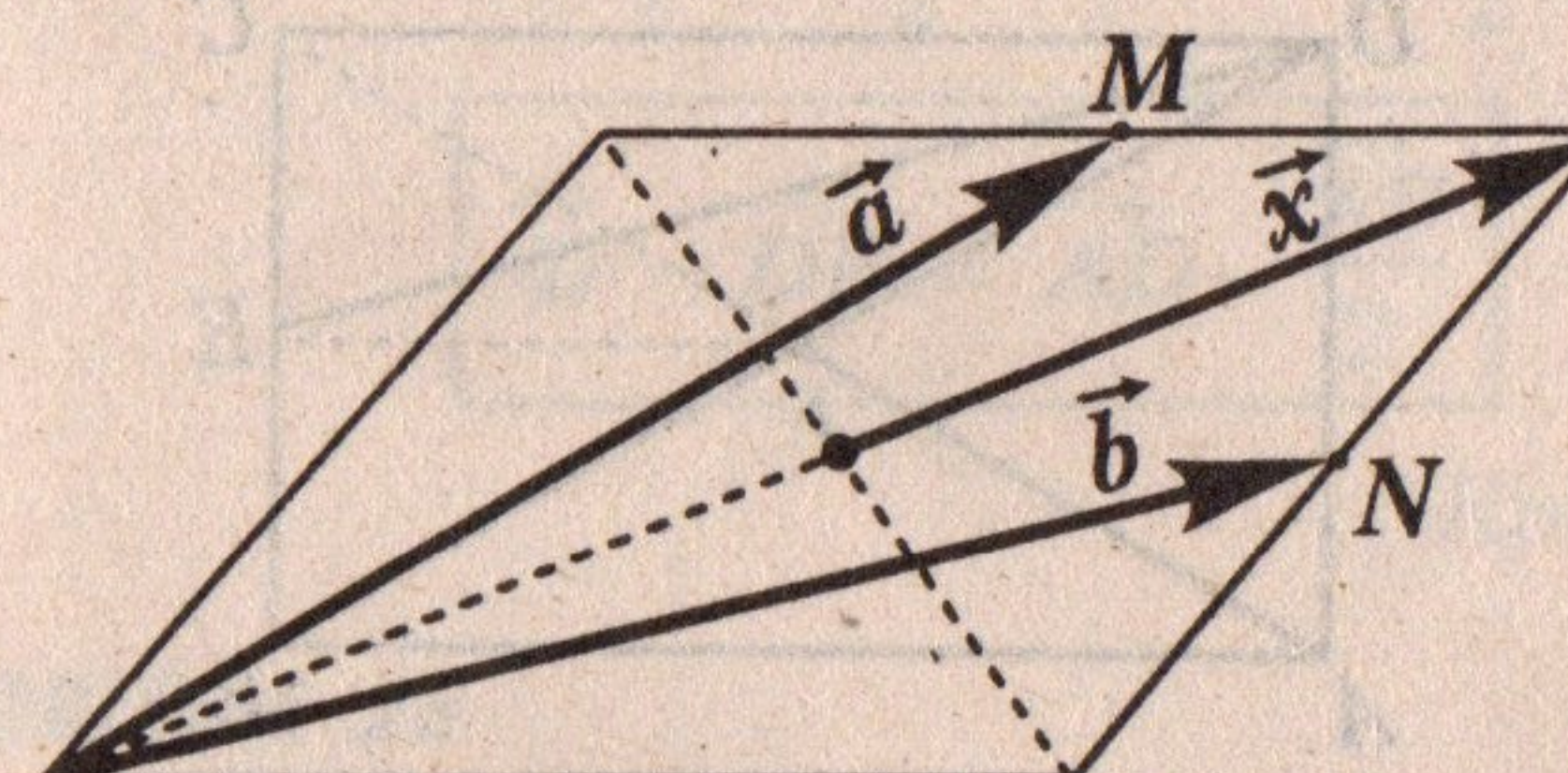
$$n = 1$$

$$\therefore \boxed{\frac{m}{n} = 2}$$

Clave: C

**PROBLEMA 25**

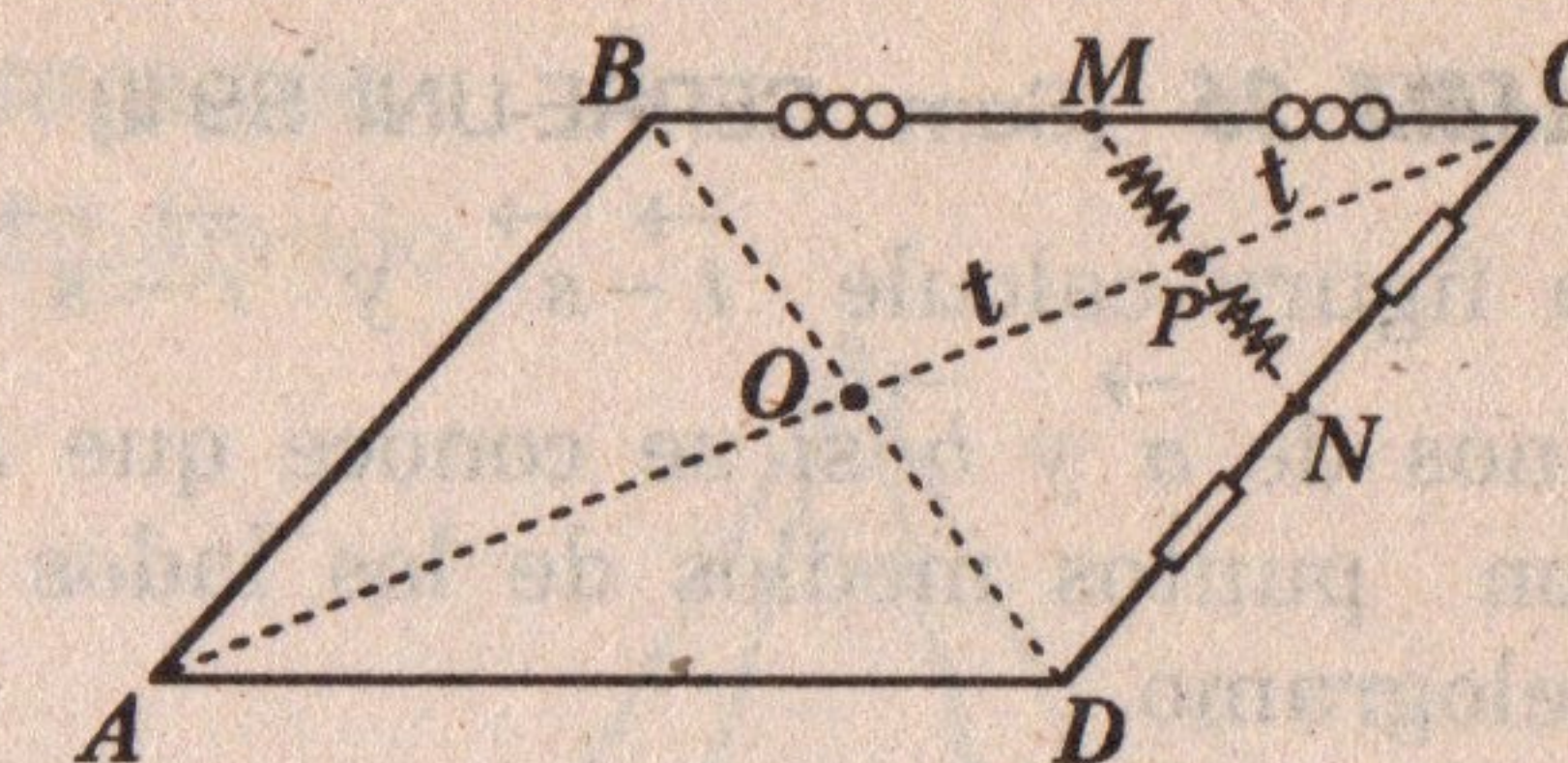
En el paralelogramo mostrado en la figura, halle  $\vec{x}$  en función de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . M y N son puntos medios de sus respectivos lados.



- A)  $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$  B)  $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$   
C)  $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}$  D)  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$   
E)  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{6}$

**RESOLUCIÓN**

Ayudados por la geometría hacemos trazos auxiliares.



Si M y N son puntos medios, entonces:

$$* MN = \frac{1}{2}BD$$

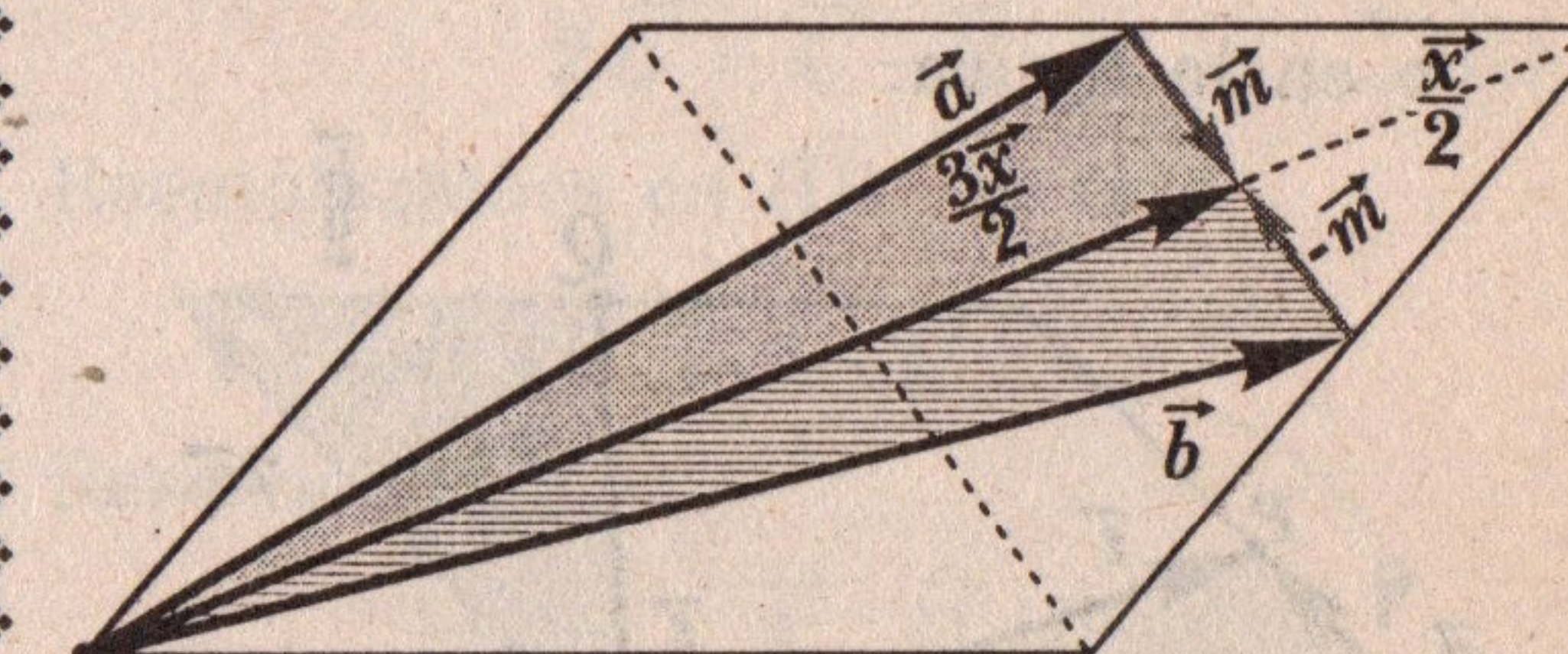
$$* MP = PN$$

$$* OP = PC$$

De los resultados obtenidos se concluye que :

$$\vec{AP} = \vec{x} + \frac{\vec{x}}{2} = \frac{3\vec{x}}{2}$$

Redibujando el paralelogramo ubicamos los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\frac{3\vec{x}}{2}$ . Para formar el polígono vectorial, adicionamos los vectores  $\vec{m}$  y  $-\vec{m}$ .



En los  $\Delta_s$  sombreados.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3\vec{x}}{2} &= \vec{a} + \vec{m} \\ \frac{3\vec{x}}{2} &= \vec{b} - \vec{m} \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\frac{3\vec{x}}{2} = \vec{a} + \vec{b}$$

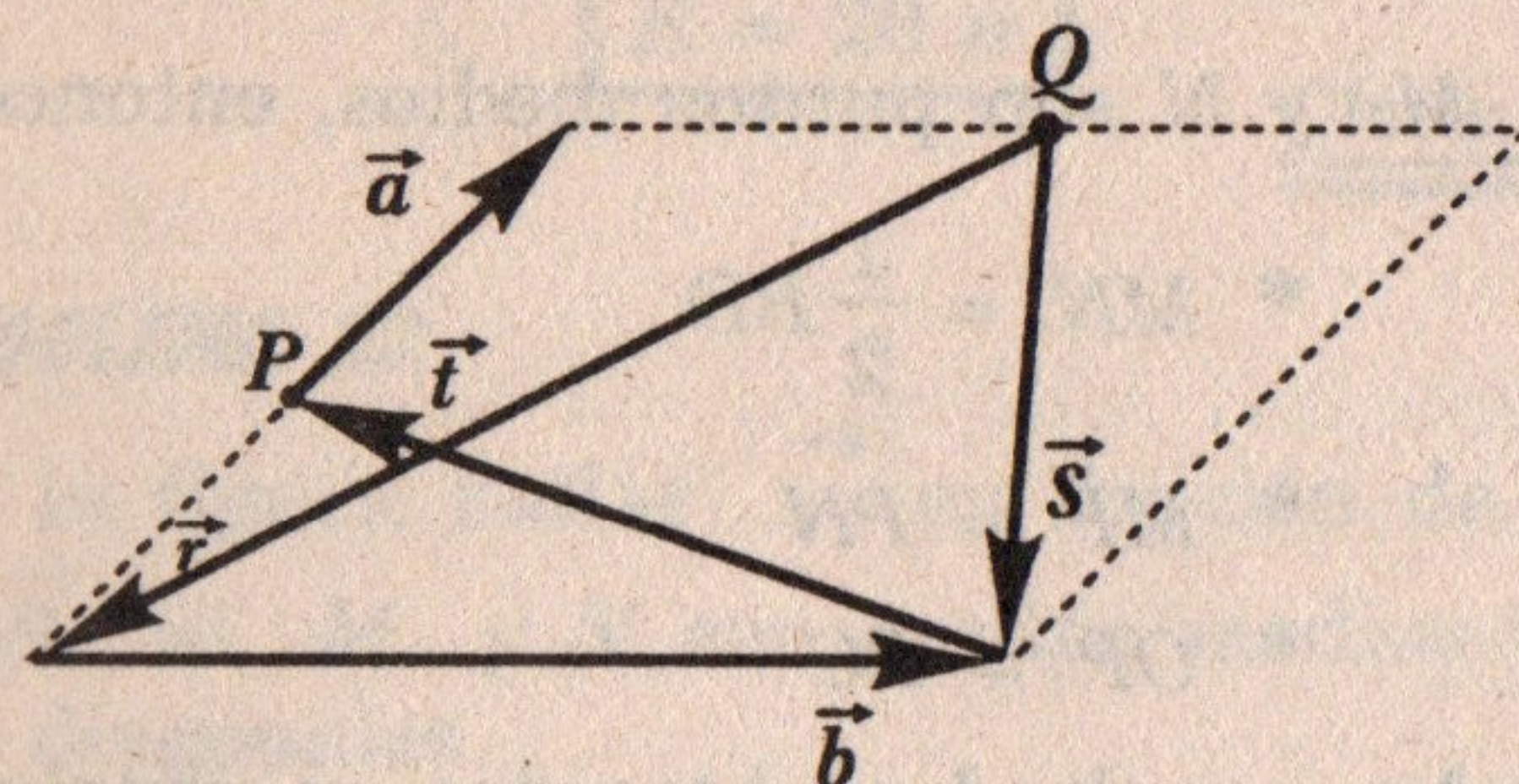
$$\therefore \boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}}$$

Clave: D



**PROBLEMA 26** [Sem. CEPRE-UNI 99-II]

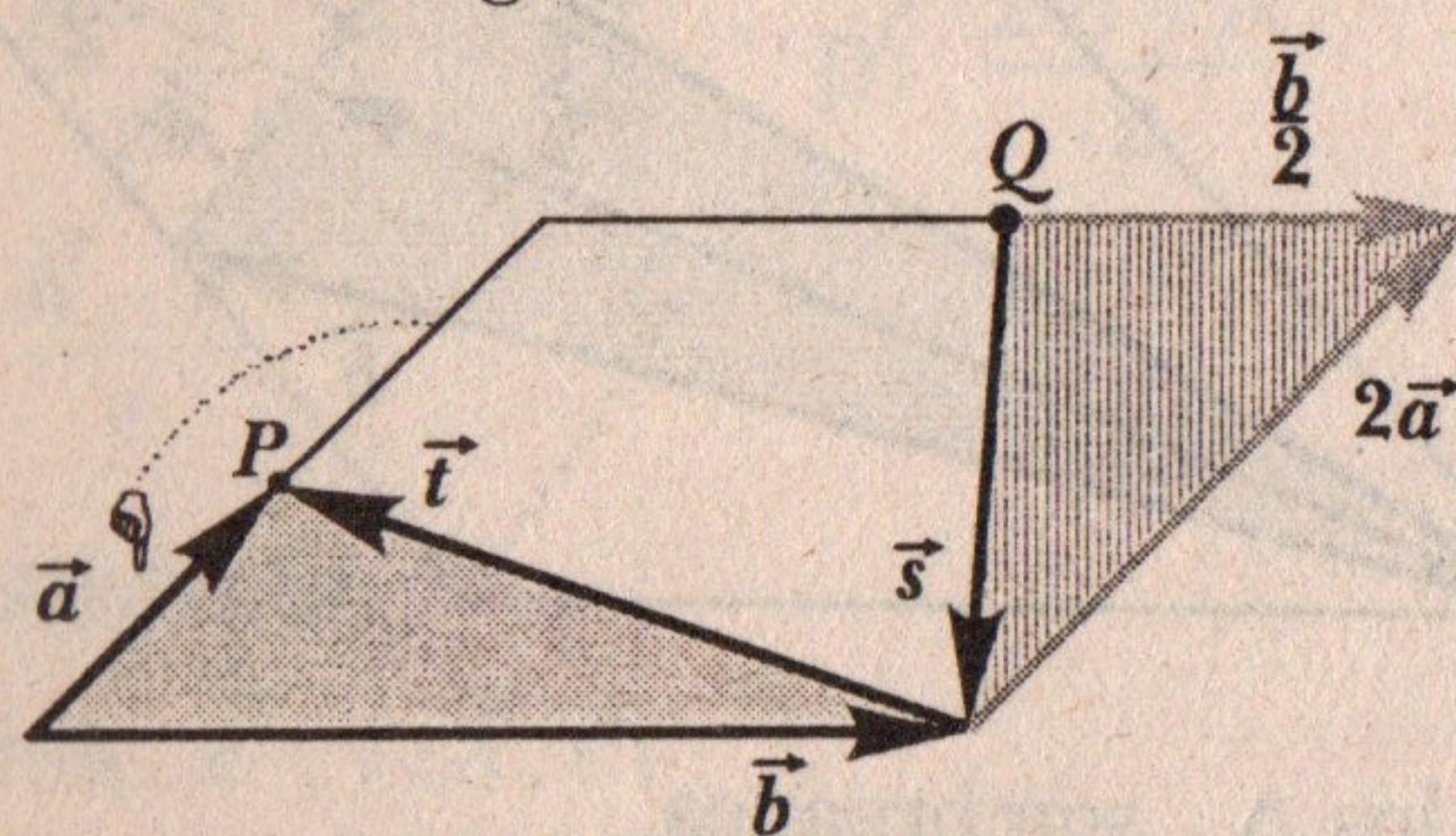
En la figura calcule  $\vec{t} - \vec{s}$  y  $\vec{r} - \vec{s}$  en términos de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  si se conoce que P y Q son puntos medios de los lados del paralelogramo.



- A)  $3\vec{a} + 1,5\vec{b}$ ;  $\vec{b}$       B)  $3\vec{a} - 1,5\vec{b}$ ;  $\vec{b}$   
C)  $1,5\vec{a} - 3\vec{b}$ ;  $-\vec{b}$       D)  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ;  $\vec{b}$   
E)  $3\vec{a} - 1,5\vec{b}$ ;  $-\vec{b}$

**RESOLUCIÓN**

- ① Calculamos  $\vec{t} - \vec{s}$  en términos de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  en la figura.



En los  $\Delta_s$  sombreados :

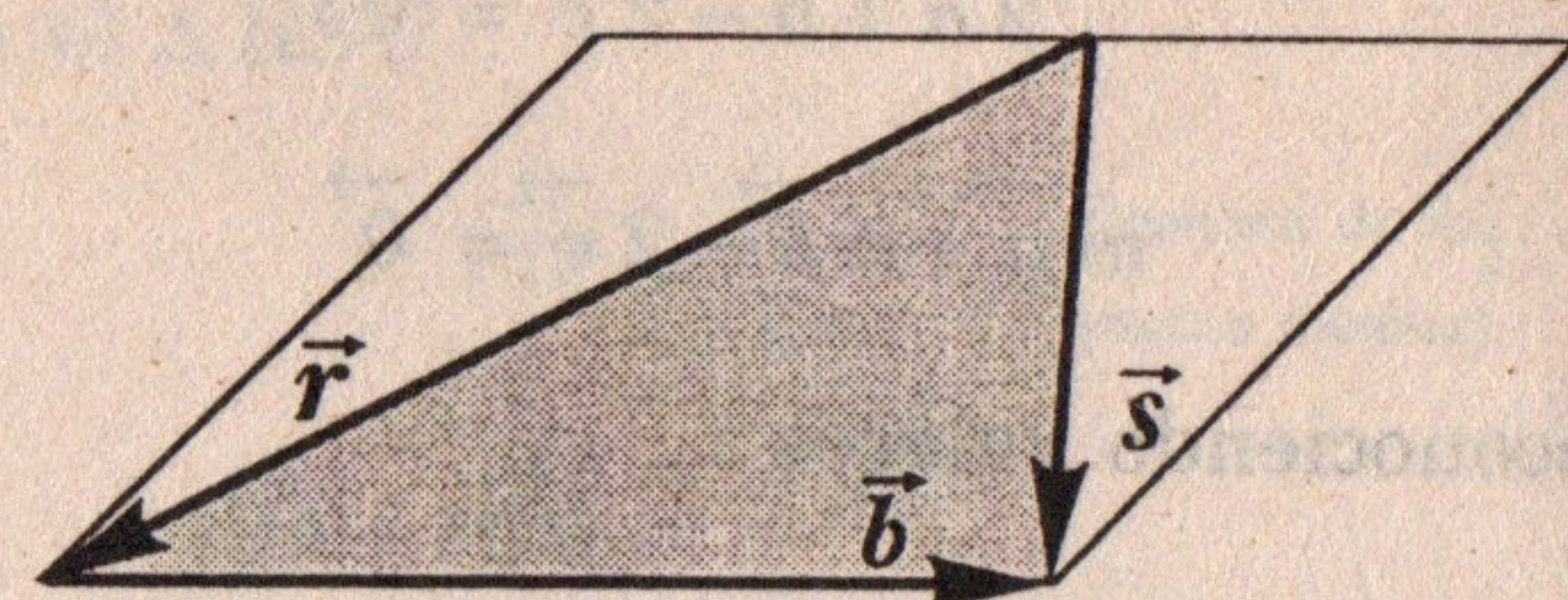
$$\begin{aligned} * \vec{b} + \vec{t} &= \vec{a} \\ \vec{t} &= \vec{a} - \vec{b} \end{aligned} \quad \dots (I)$$

$$\begin{aligned} * \vec{s} + 2\vec{a} &= \vec{b}/2 \\ \vec{s} &= \vec{b}/2 - 2\vec{a} \end{aligned} \quad \dots (II)$$

Restando (I) - (II)

$$\vec{t} - \vec{s} = 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$$

- ② Calculamos  $\vec{r} - \vec{s}$ , en el paralelogramo original.



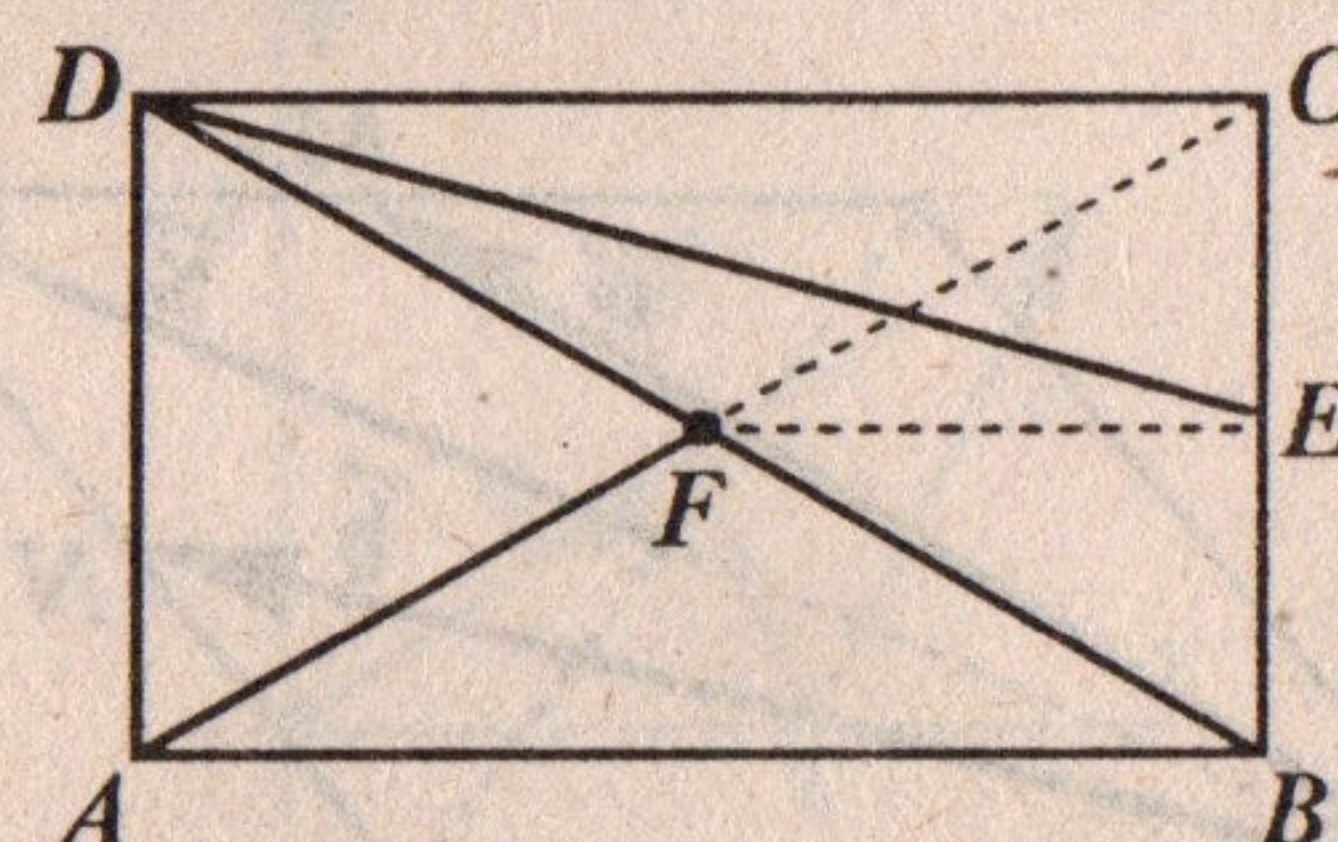
$$\vec{r} + \vec{b} = \vec{s}$$

$$\vec{r} - \vec{s} = -\vec{b}$$

Clave: E

**PROBLEMA 27**

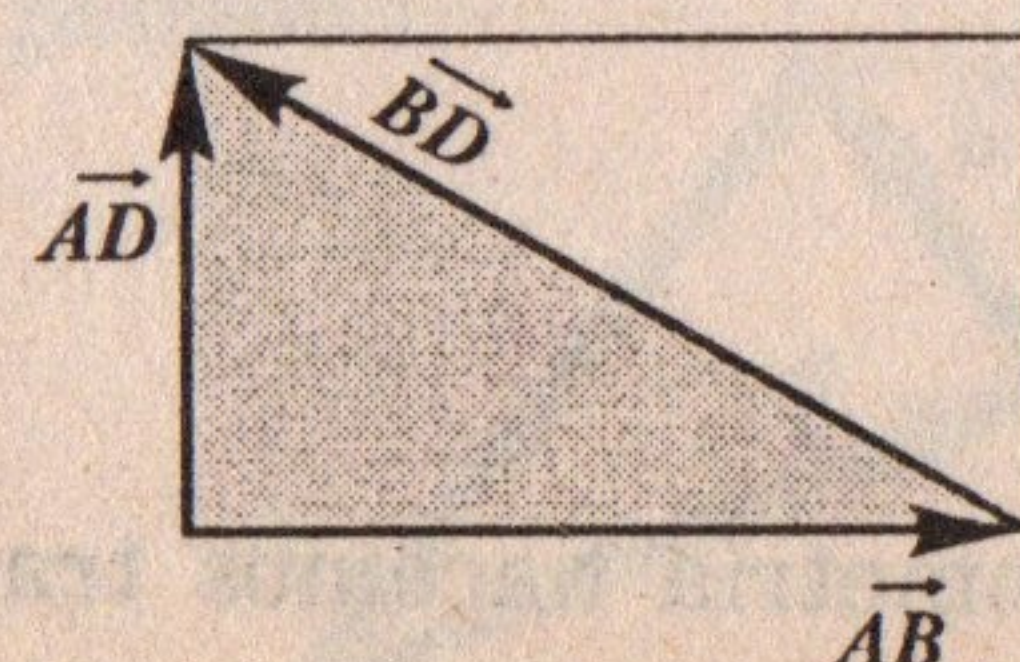
Respecto a la figura que se muestra, exprese en términos de  $\vec{AD}$  y  $\vec{AB}$  cada uno de los siguientes vectores.



- a)  $\vec{BD}$     b)  $\vec{AF}$     c)  $\vec{DE}$     d)  $\vec{AF} - \vec{DE}$

**RESOLUCIÓN**

- a) Graficando :



Observamos :

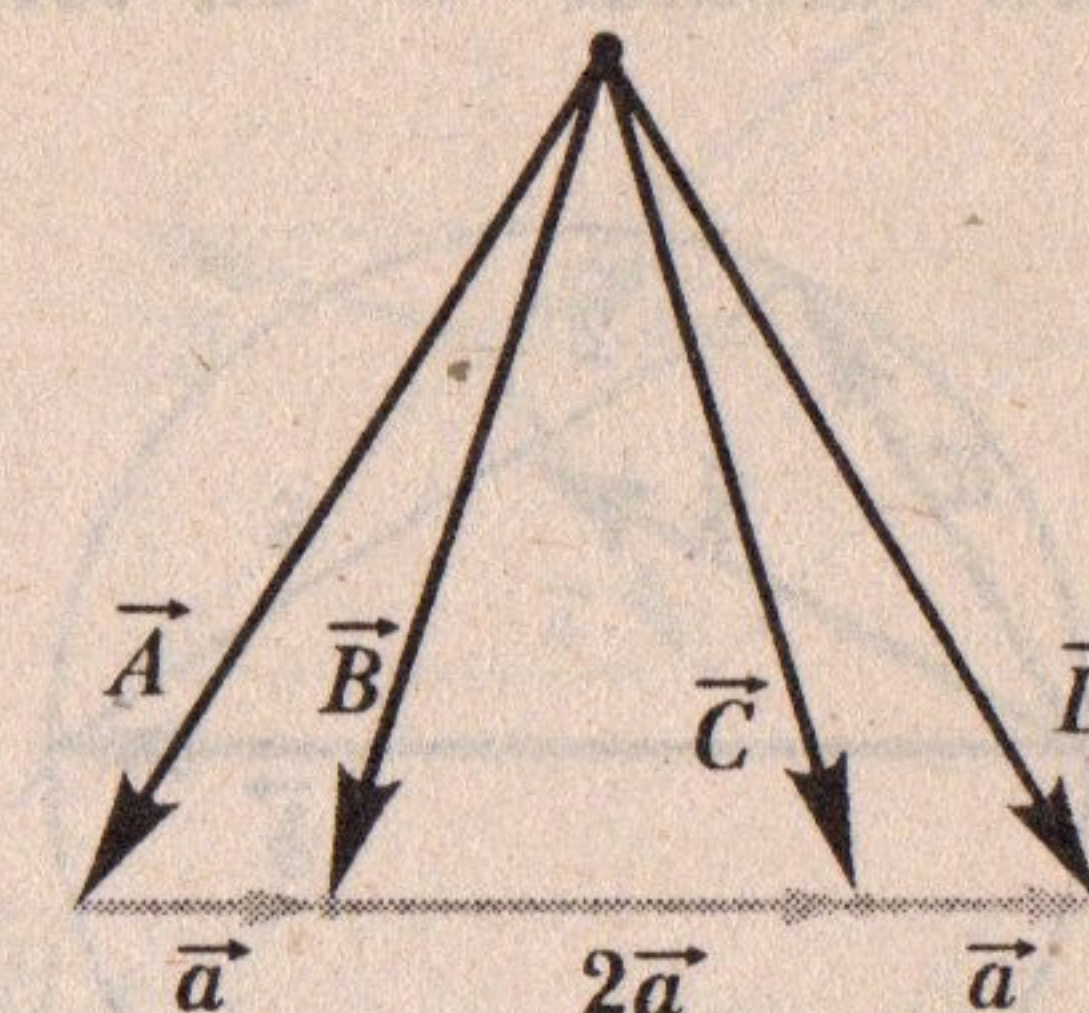
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$$

$$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$$

Rpta.

**RESOLUCIÓN**

Redibujando :



\* Agregamos un vector " $\vec{a}$ " para facilitar el cálculo.

\* Entonces del gráfico :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{A} + \vec{a} \\ \vec{D} &= \vec{C} + \vec{a} \end{aligned} \quad (+)$$

$$\vec{B} + \vec{D} = \vec{A} + \vec{C} + 2\vec{a} \quad \dots (I)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{B} + 2\vec{a} \\ 2\vec{a} &= \vec{C} - \vec{B} \end{aligned} \quad \dots (II)$$

Reemplazamos en (II) en (I) :

$$\vec{B} + \vec{D} = \vec{A} + \vec{C} + \vec{C} - \vec{B}$$

Resolviendo :

$$\vec{B} - \vec{C} = \frac{\vec{A}}{2} - \frac{\vec{D}}{2}$$

$$\vec{B} - \vec{C} = \frac{1}{2}\vec{A} + \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{D}$$

Pero :

$$\vec{B} - \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{D} \quad \dots \text{dato}$$

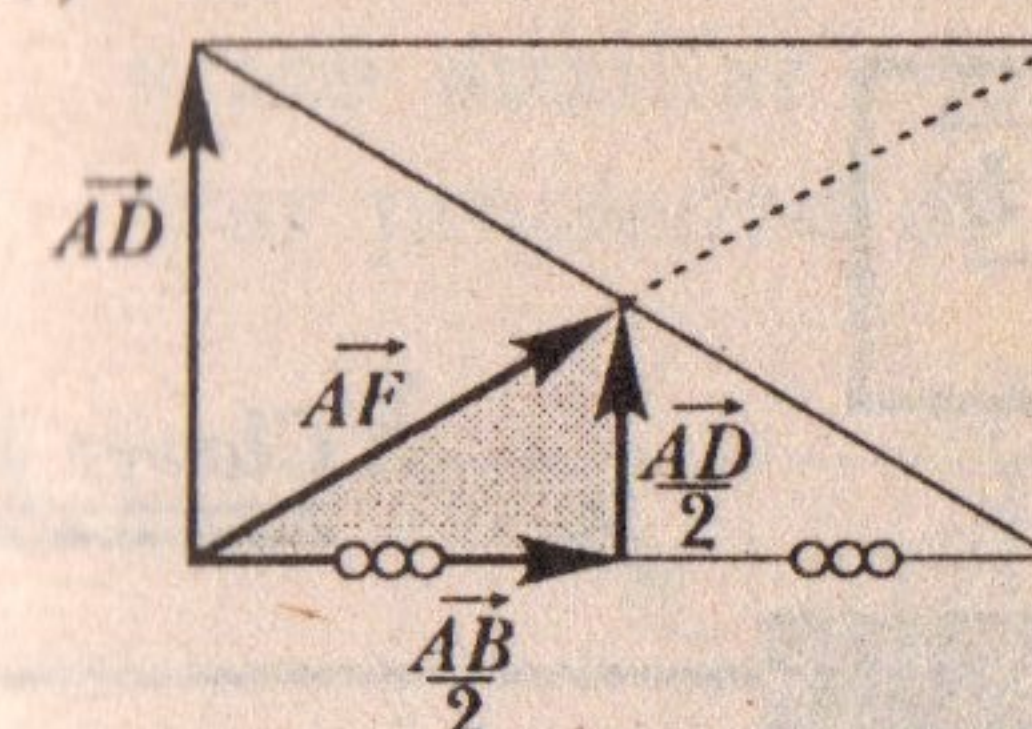
Reconociendo :

$$\alpha = 1/2 \quad ; \quad \beta = -1/2$$

$$\therefore \alpha - \beta = 1$$

Clave: D

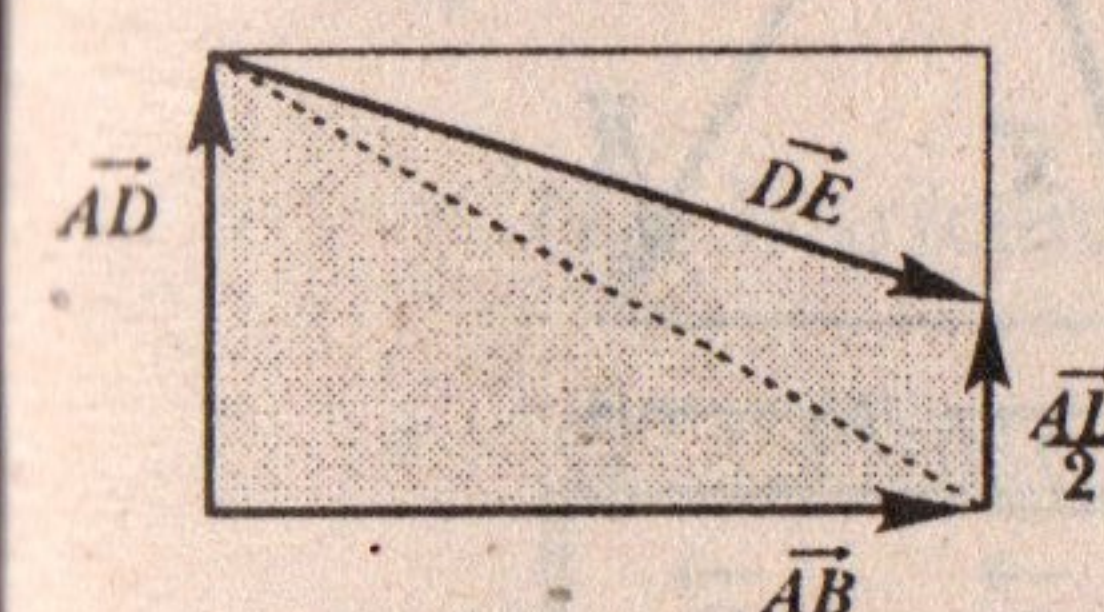
- b)  $\vec{AF} = ??$



$$\begin{aligned} \text{Observamos :} \\ \vec{AF} &= \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AD}}{2} \\ \therefore \vec{AF} &= \frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{2} \end{aligned}$$

Rpta.

- c)  $\vec{DE} = ??$



$$\begin{aligned} \text{Observamos :} \\ \vec{AD} + \vec{DE} &= \vec{AB} + \frac{\vec{AD}}{2} \\ \therefore \vec{DE} &= \vec{AB} - \frac{\vec{AD}}{2} \end{aligned}$$

Rpta.

- d)  $\vec{AF} - \vec{DE} = ??$

De los resultados anteriores

$$\vec{AF} - \vec{DE} = \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AD}}{2} - \left( \vec{AB} - \frac{\vec{AD}}{2} \right)$$

$$\therefore \vec{AF} - \vec{DE} = \vec{AD} - \frac{\vec{AB}}{2}$$

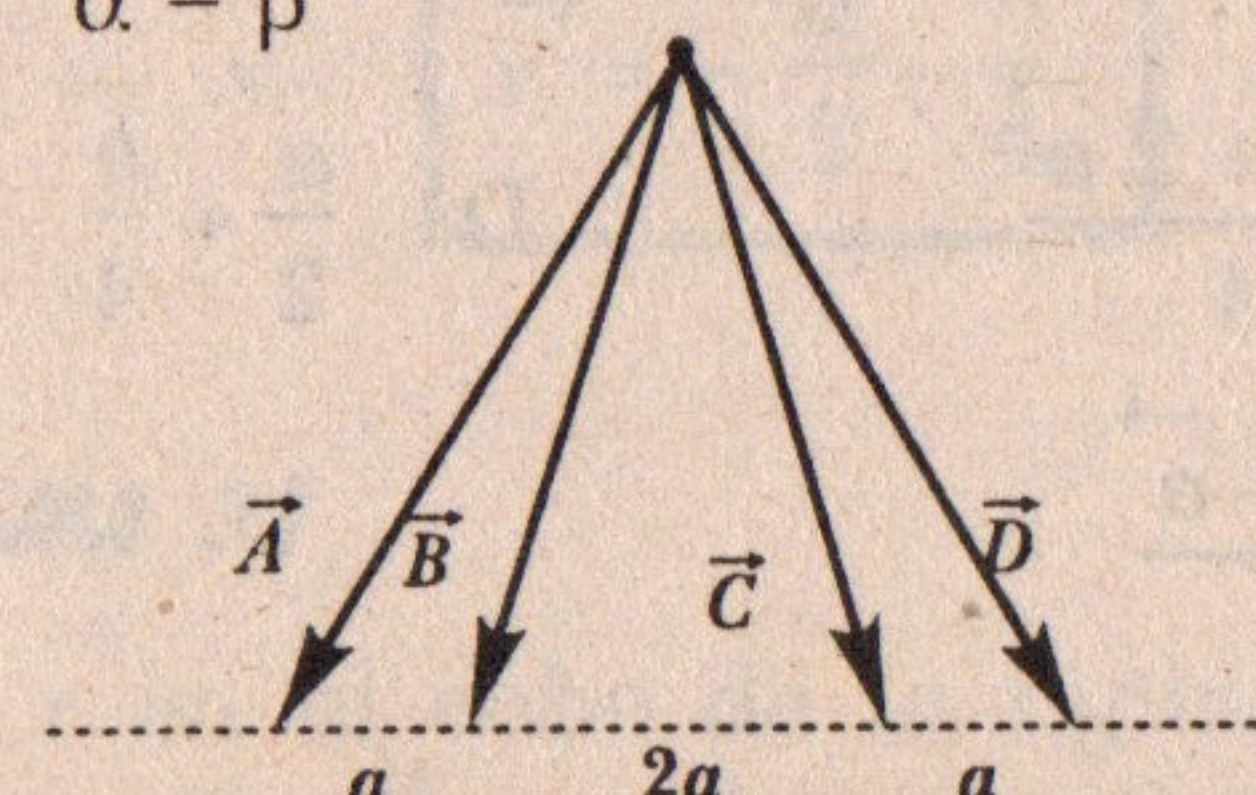
Rpta.

**PROBLEMA 28**

Los vectores mostrados en la figura satisfacen la relación :

$$\vec{B} - \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{D}$$

Halle :  $\alpha - \beta$

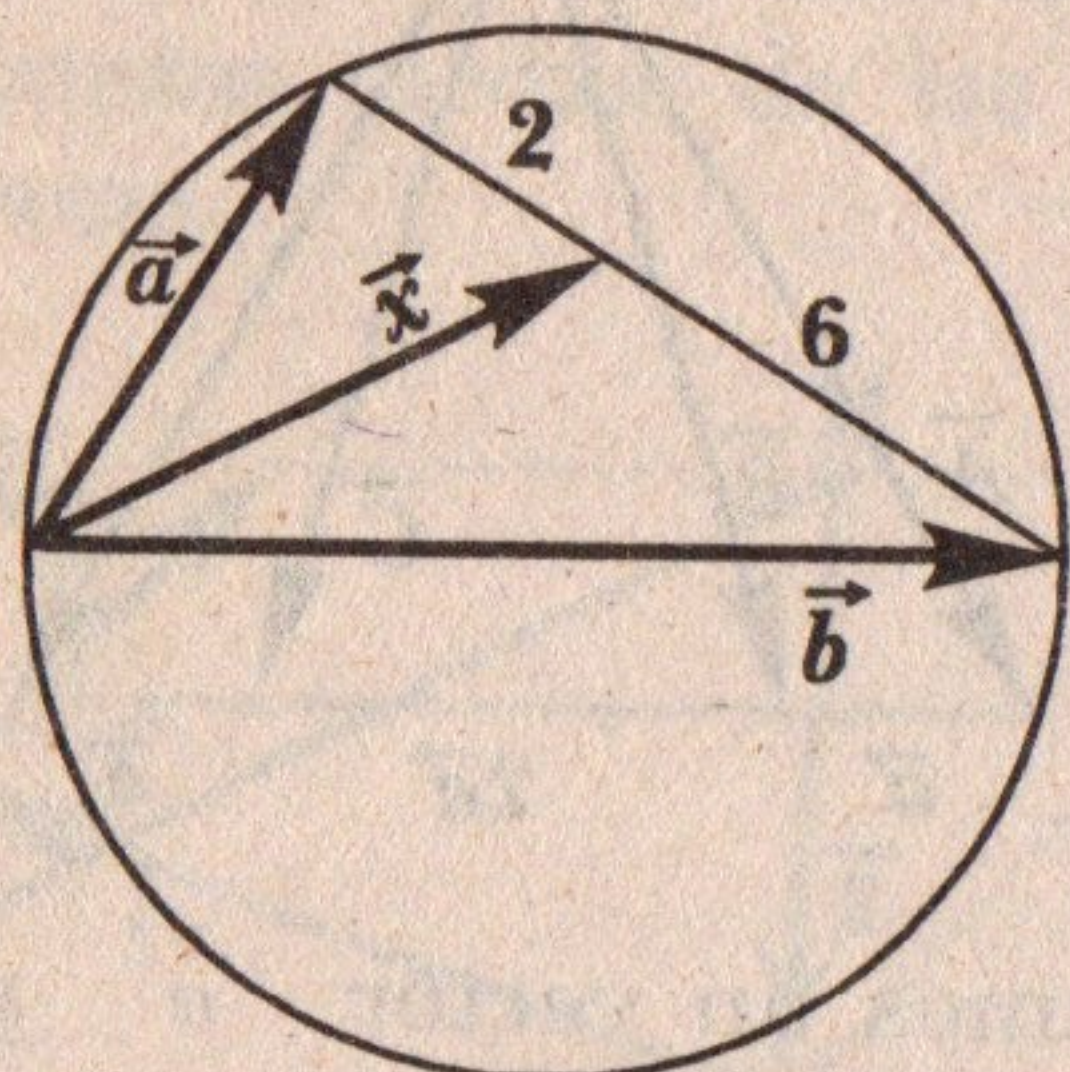


- A) 1/2      B) -2      C) 2  
D) 1      E) -1



## PROBLEMA 29

En la figura calcular  $\vec{x}$  en términos de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

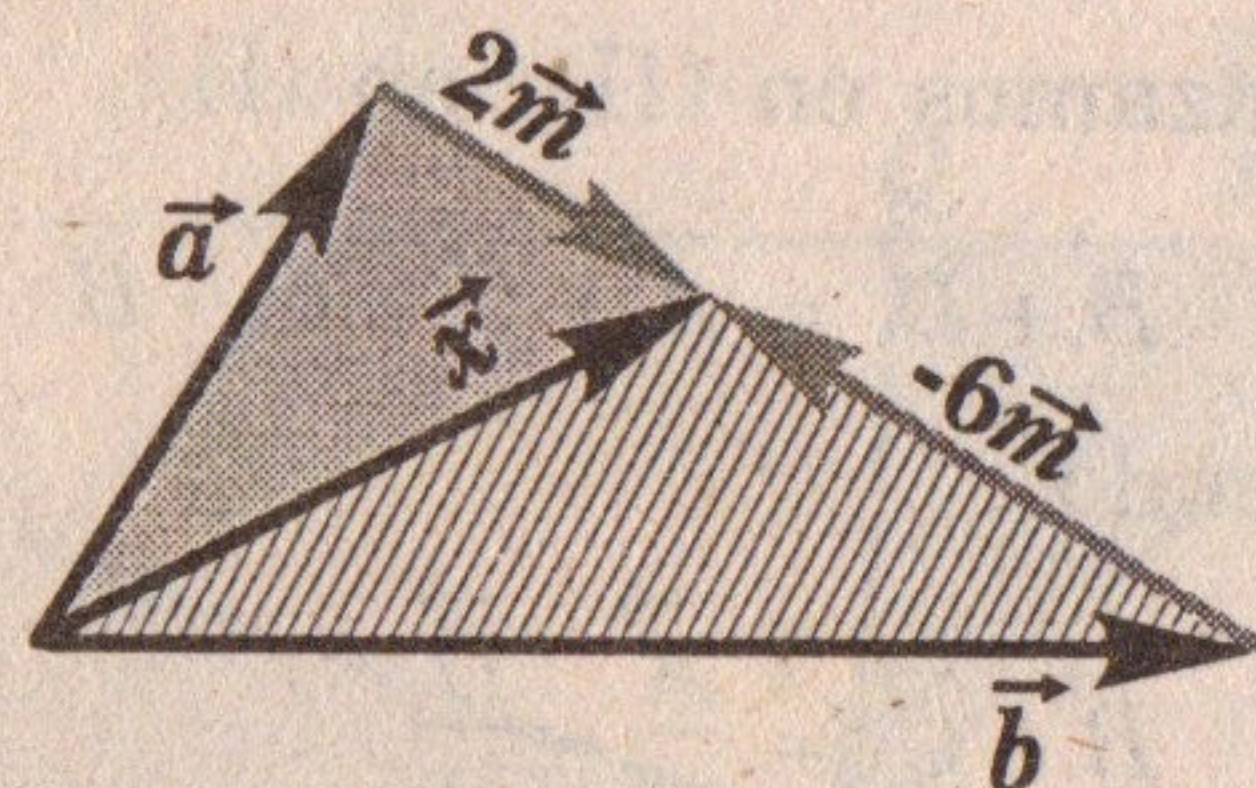


- A)  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{8}$  B)  $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$   
 C)  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{4}$  D)  $\frac{8\vec{a} + \vec{b}}{4}$   
 E)  $\frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}$

## RESOLUCIÓN

Piden  $\vec{x} : f(\vec{a}, \vec{b})$

Graficamos



\* Agregamos vectores  $2\vec{m}$  y  $-6\vec{m}$  que son proporcionales a la medida de los segmentos.

En las regiones sombreadas

$$\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{m} \quad \dots (I)$$

$$\vec{x} = \vec{b} - 6\vec{m} \quad \dots (II)$$

Multiplicando (I)  $\times 3$  y sumando las dos expresiones, obtenemos:

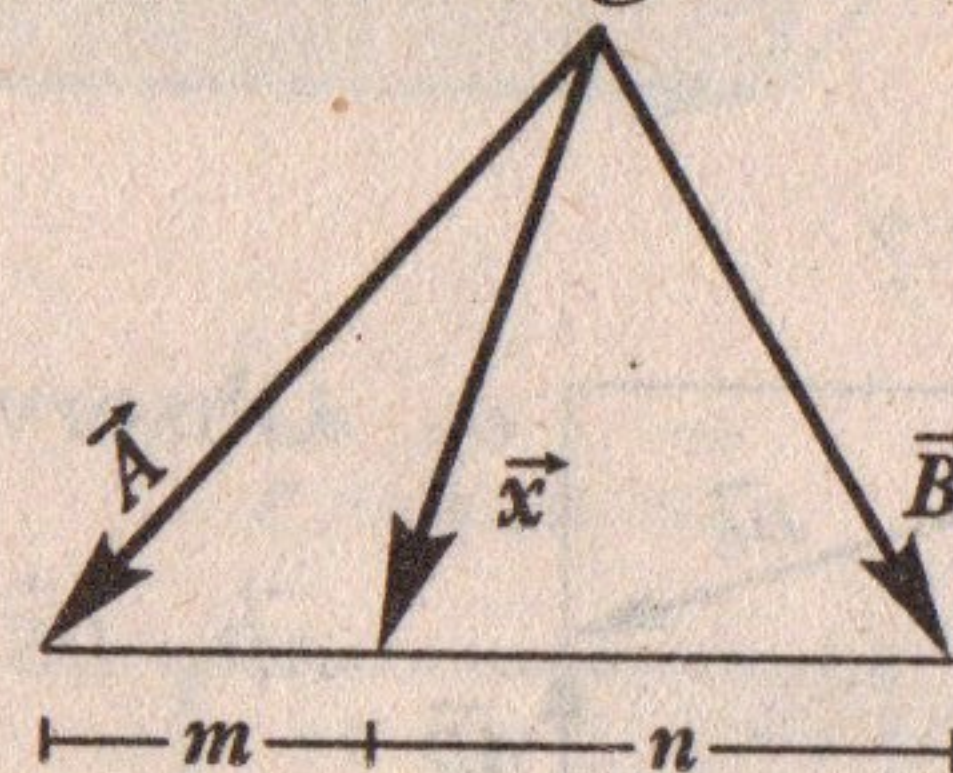
$$4\vec{x} = 3\vec{a} + 6\vec{m} + \vec{b} - 6\vec{m}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$$

Clave: B

Nota:

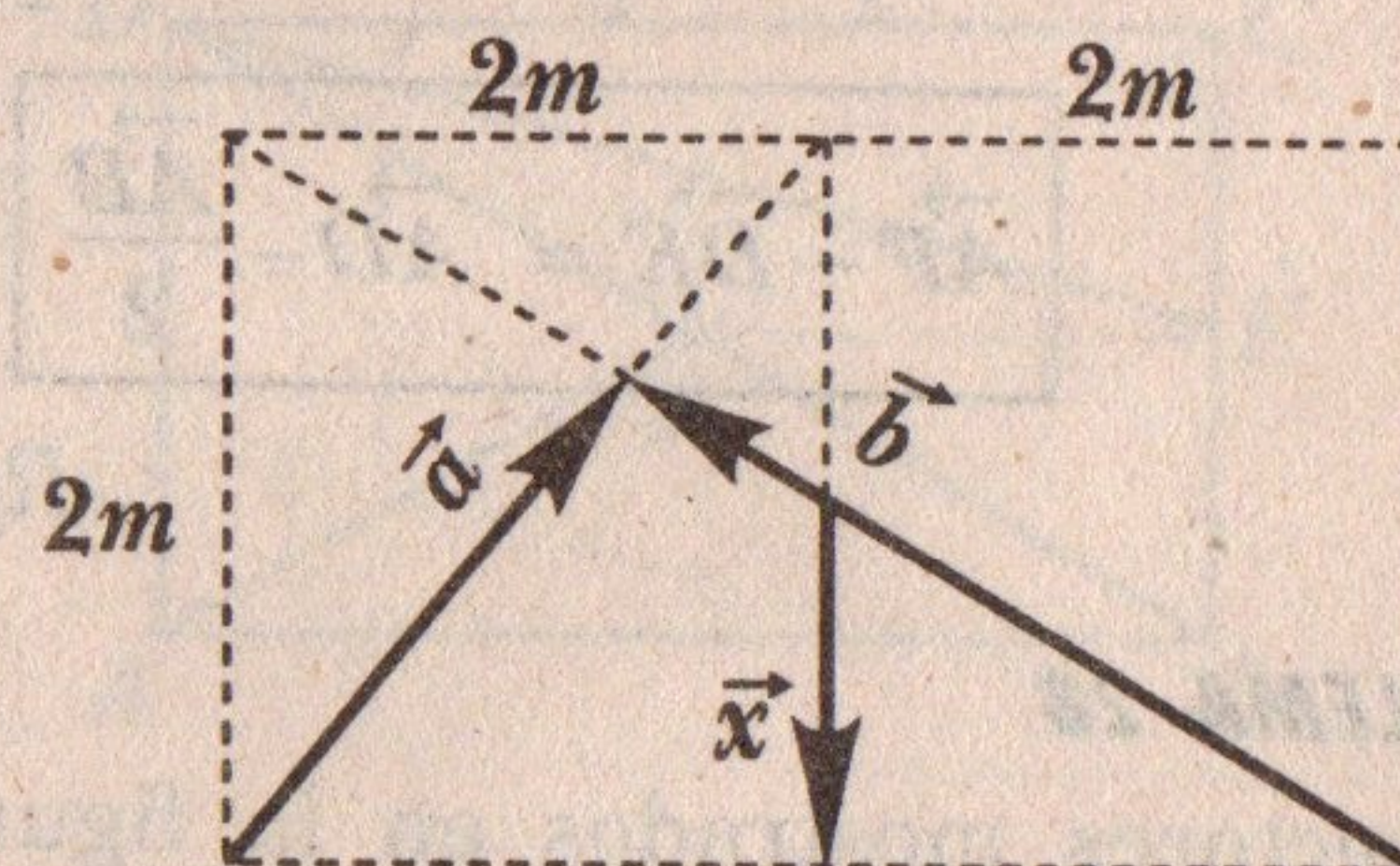
Fórmula general



$$\vec{x} = \frac{n\vec{A} + m\vec{B}}{m+n}$$

## PROBLEMA 30 (Sem. CEPRE-UNI 98-II)

En la figura se muestra un rectángulo con los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{x}$ . Expresar  $\vec{x}$  en función de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

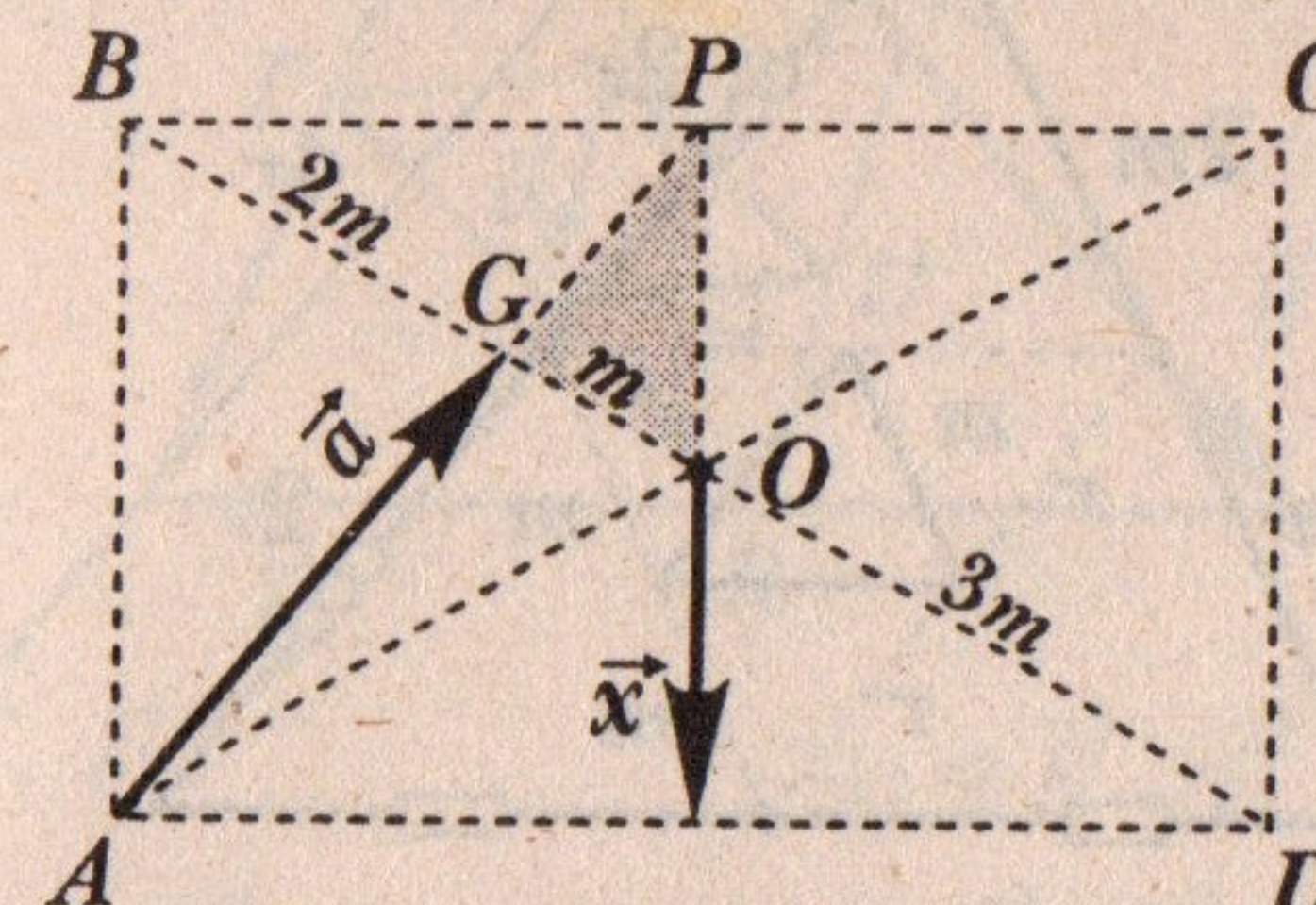


- A)  $-\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{4}$  B)  $-\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$   
 C)  $\frac{-\vec{b} + 2\vec{a}}{4}$  D)  $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{4}$   
 E)  $\frac{2\vec{b} + \vec{a}}{4}$

## RESOLUCIÓN

Piden:  $\vec{x} : f(\vec{a}, \vec{b})$

\* Ayudados por la geometría hacemos trazo auxiliar con intención de encontrar propiedad de baricentro.



\* G : Baricentro de  $\Delta ABC$ .

\* "O" : Punto medio de  $\vec{BD}$ .

\* Hacemos  $6m = |\vec{DB}|$ .

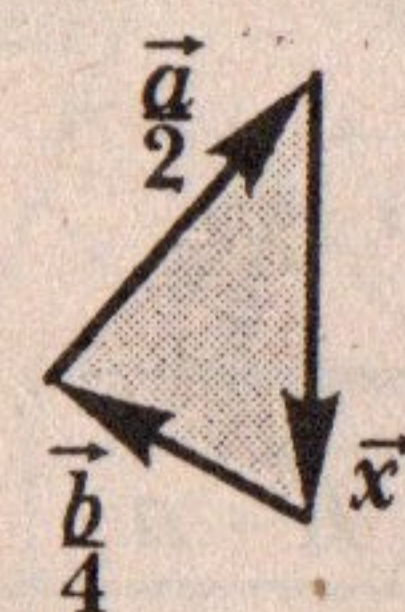
Notamos:

$$\vec{GP} = \frac{1}{2}\vec{AG} = \frac{\vec{a}}{2}$$

$$\vec{PO} = \vec{x}$$

$$\vec{DG} = 4\vec{m} = \vec{b} \Rightarrow m = \frac{\vec{b}}{4}$$

En el  $\Delta GPO$



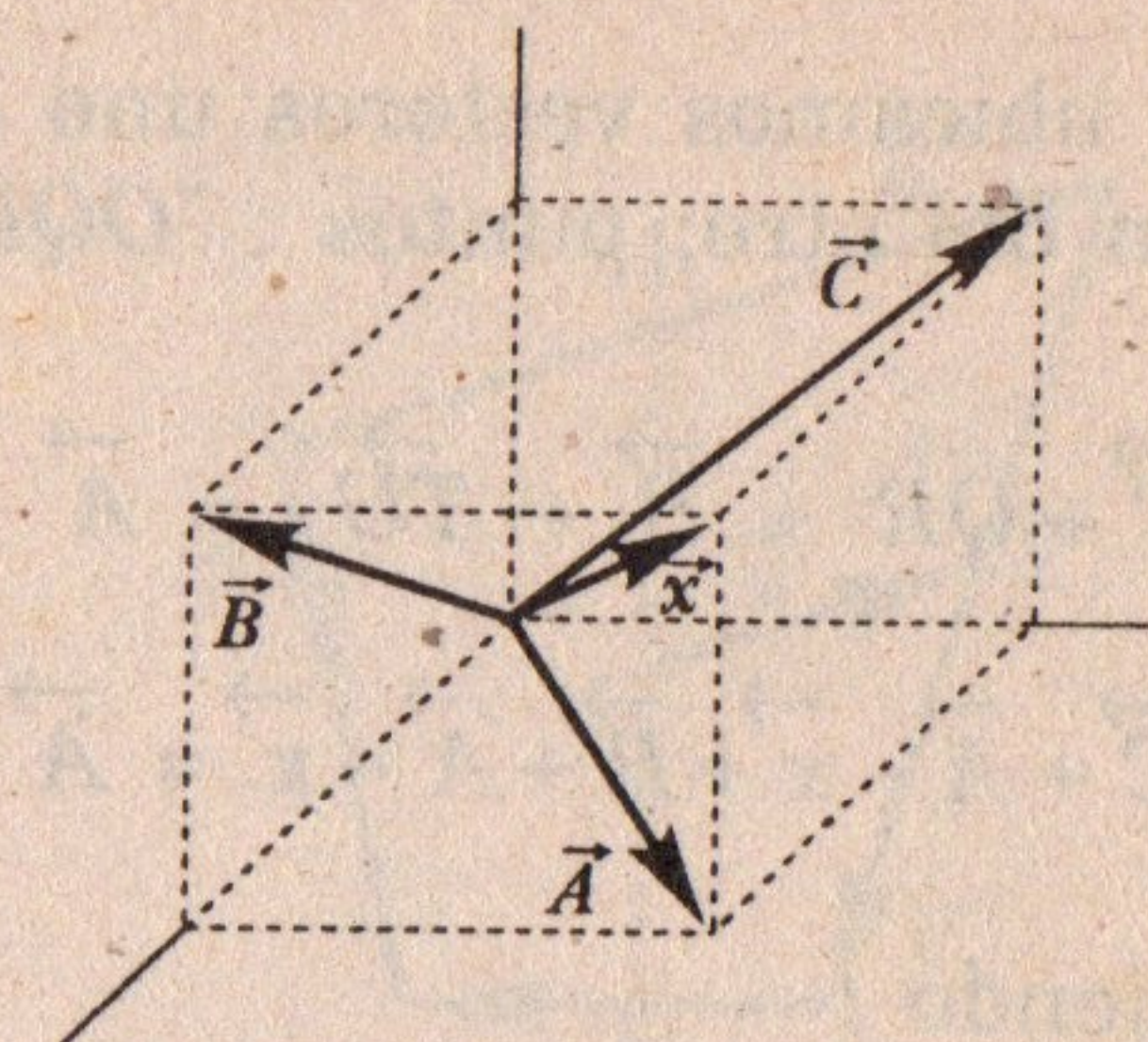
$$\vec{x} + \frac{\vec{b}}{4} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{x} = -\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{4}$$

Clave: A

## PROBLEMA 31

Hallar  $\vec{x}$  en el cubo de la figura, en términos de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ .

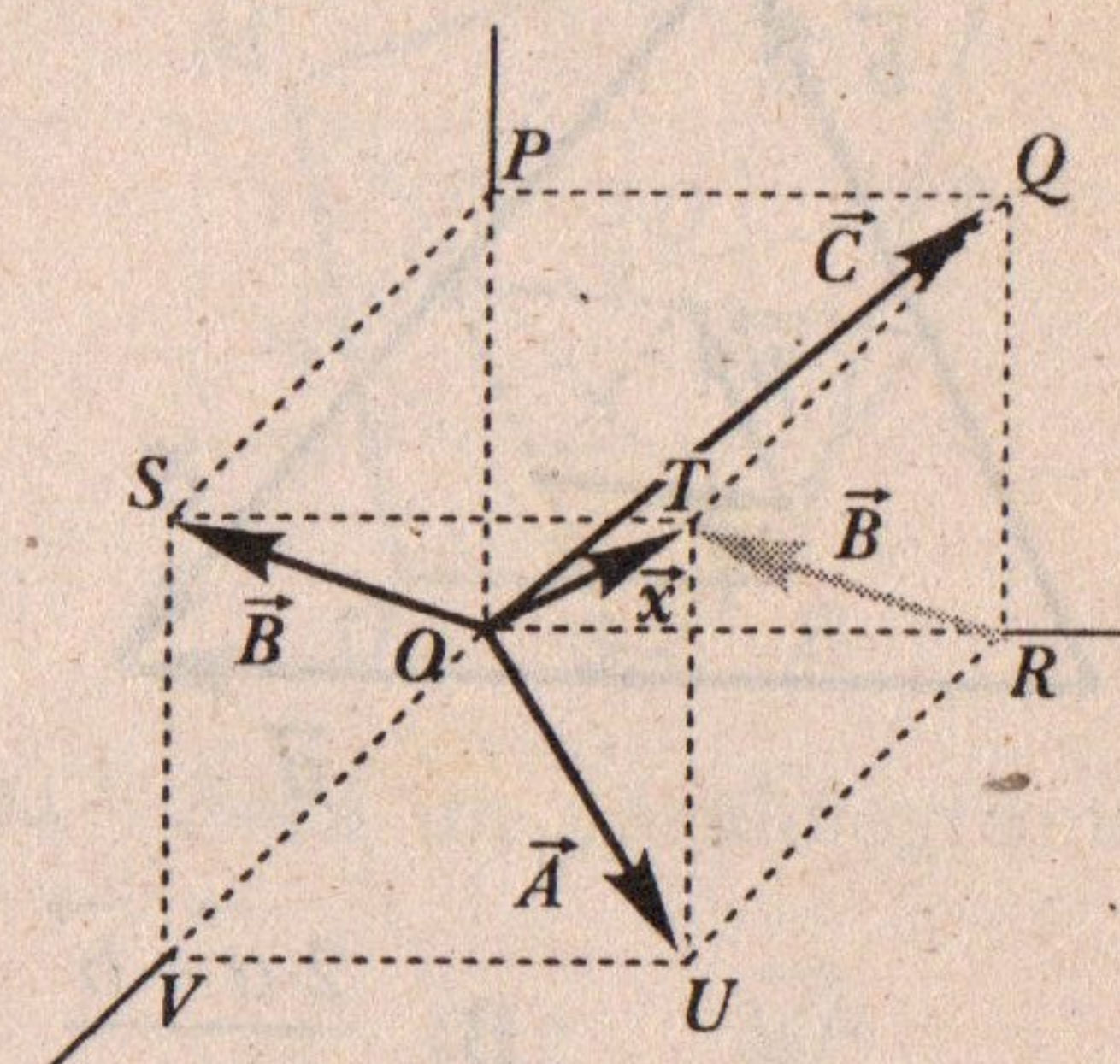


- A)  $\frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{4}$  B)  $\frac{\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}}{4}$   
 C)  $\frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{2}$  D)  $\frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$   
 E)  $\frac{2}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$

## RESOLUCIÓN

Piden:  $\vec{x} : f(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$

Trasladamos al vector  $\vec{B}$  sobre línea paralela y graficamos:



\* Notamos:

$$\vec{OS} = \vec{RT} = \vec{B}$$

Además:

$$\vec{A} + \vec{UT} = \vec{x}$$

$$\therefore \vec{UT} = \vec{x} - \vec{A}$$

Pero:  $\vec{UT} = \vec{RQ}$

Luego:  $\vec{QR} = -\vec{RQ} = \vec{A} - \vec{x}$



Ahora, ubicamos vectores uno a continuación del otro; puntos : "OQRTUO".

$$\vec{C} + \vec{QR} + \vec{B} + \vec{TU} = \vec{A}$$

$$\vec{C} + \vec{A} - \vec{x} + \vec{B} + \vec{A} - \vec{x} = \vec{A}$$

Resolviendo :

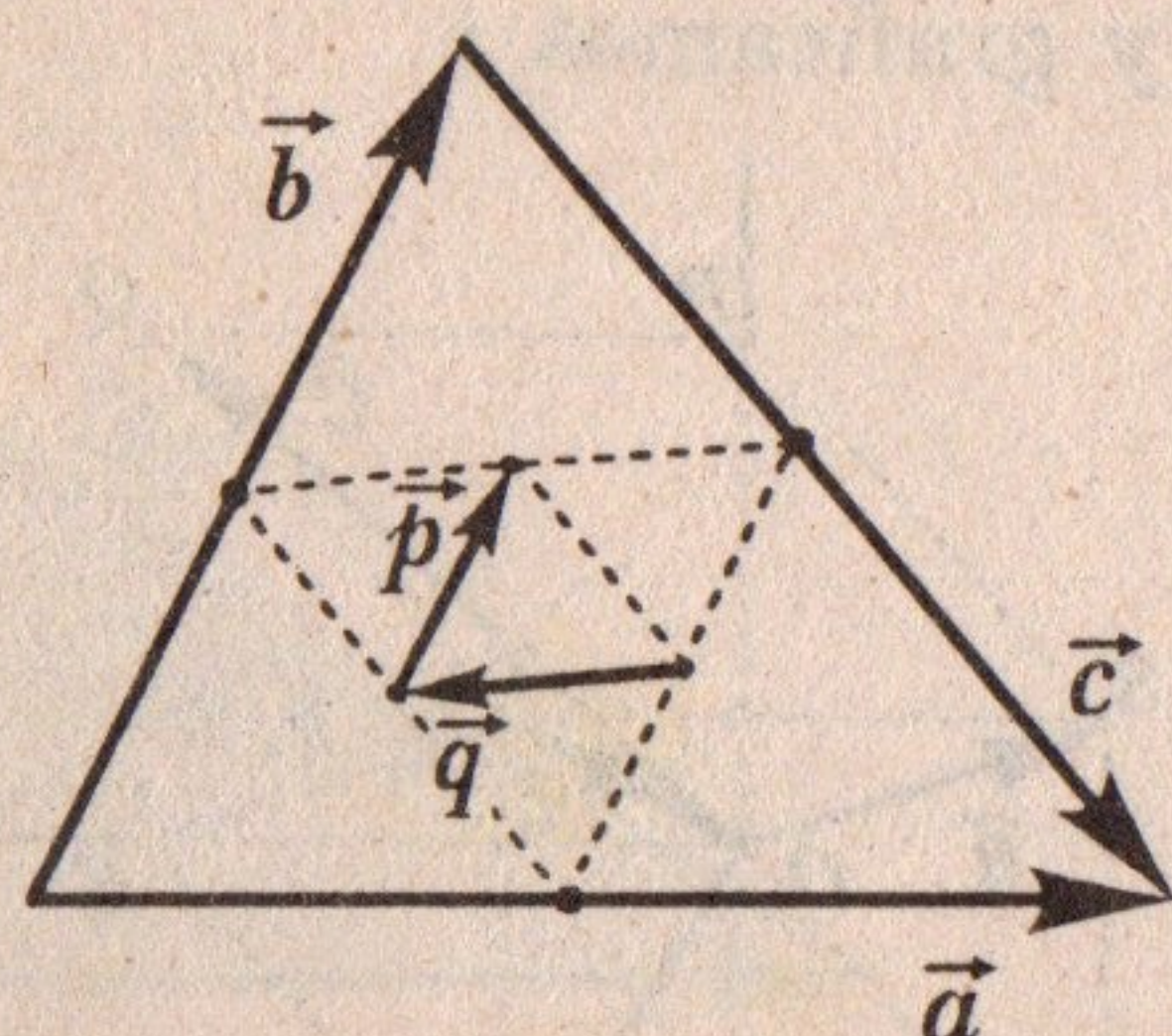
$$\vec{x} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{2}$$

Clave: C

**PROBLEMA 32** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

En la figura los triángulos interiores se construyen uniendo los puntos medios de su triángulo exterior correspondiente.

Calcular :  $\vec{p} + \vec{q}$



A)  $-\vec{c}/2$

B)  $\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{4}$

C)  $-\frac{\vec{c}}{4}$

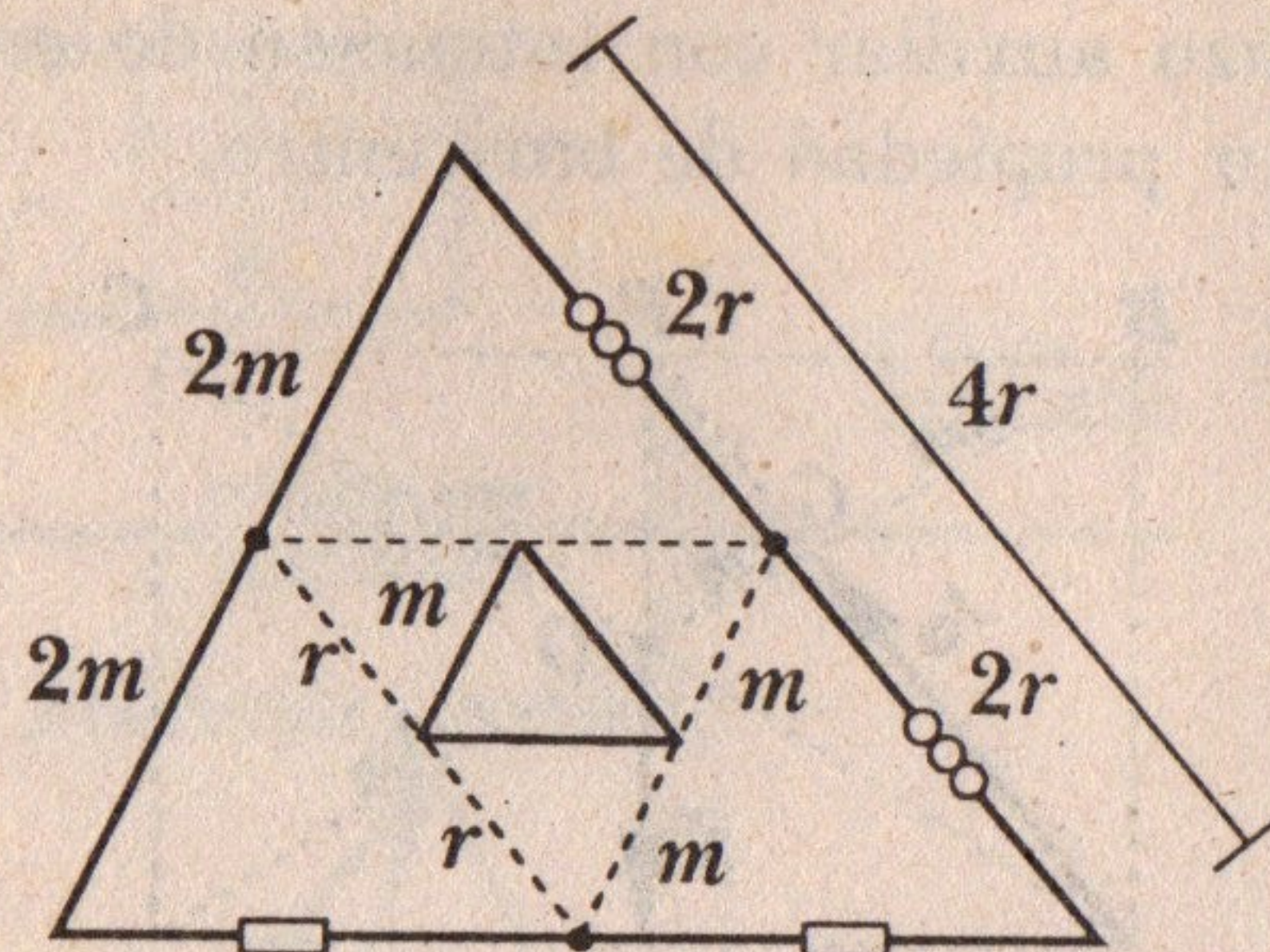
D)  $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{4}$

E) C y D

**RESOLUCIÓN**

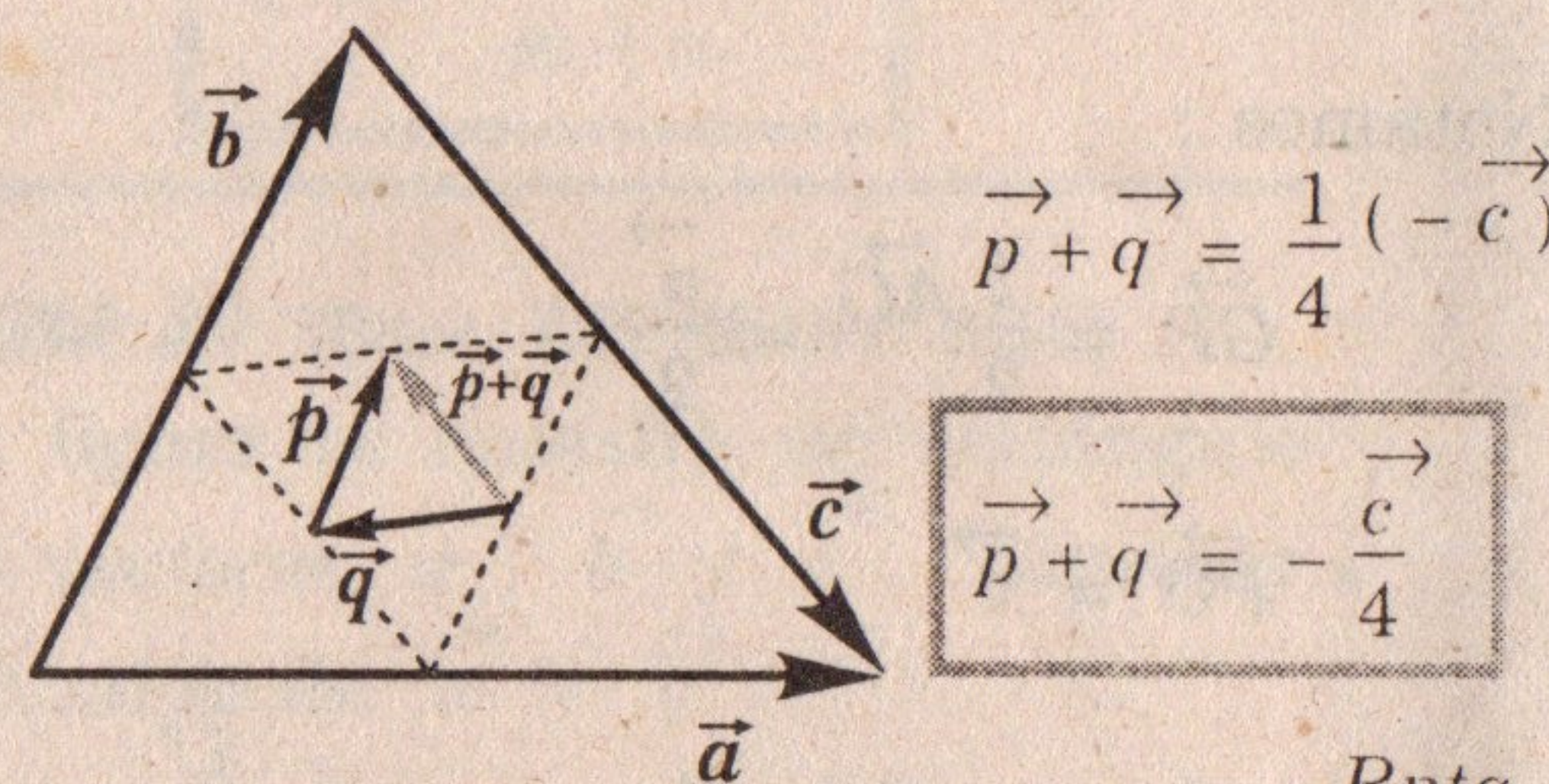
Piden :  $\vec{p} + \vec{q} = ?$

Usando la geometría hallamos la relación en los segmentos.



\* Notar, la teoría de los puntos medios se repite.

En el gráfico original :



$$\vec{p} + \vec{q} = \frac{1}{4}(-\vec{c})$$

$$\vec{p} + \vec{q} = -\frac{\vec{c}}{4}$$

Rpta.

También :

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

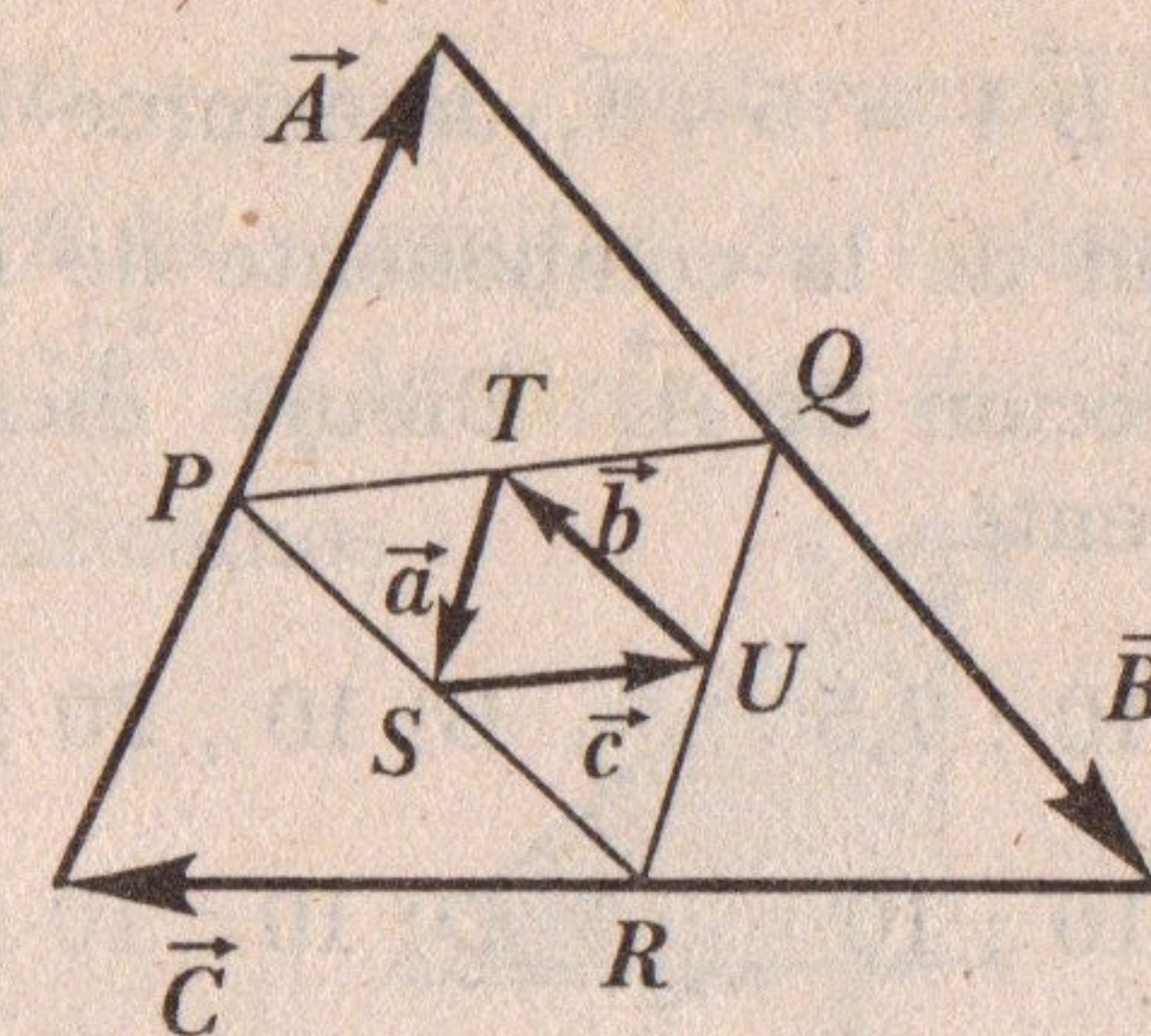
$$\vec{p} + \vec{q} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{4}$$

Rpta.

Clave: E

**PROBLEMA 33** (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

Escriba en términos de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  la expresión vectorial :  $\vec{\theta} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ . Si P, Q, R, S, T y U son puntos medios.



A)  $\vec{B} - \vec{C}$

B)  $2\vec{B} - \vec{C}$

C)  $\vec{C} - 2\vec{B}$

D)  $\vec{B} + \vec{C} - \vec{A}$

E)  $-\vec{A}$

**RESOLUCIÓN**

Piden :  $\vec{\theta} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$  como  $f(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$

En la figura :  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

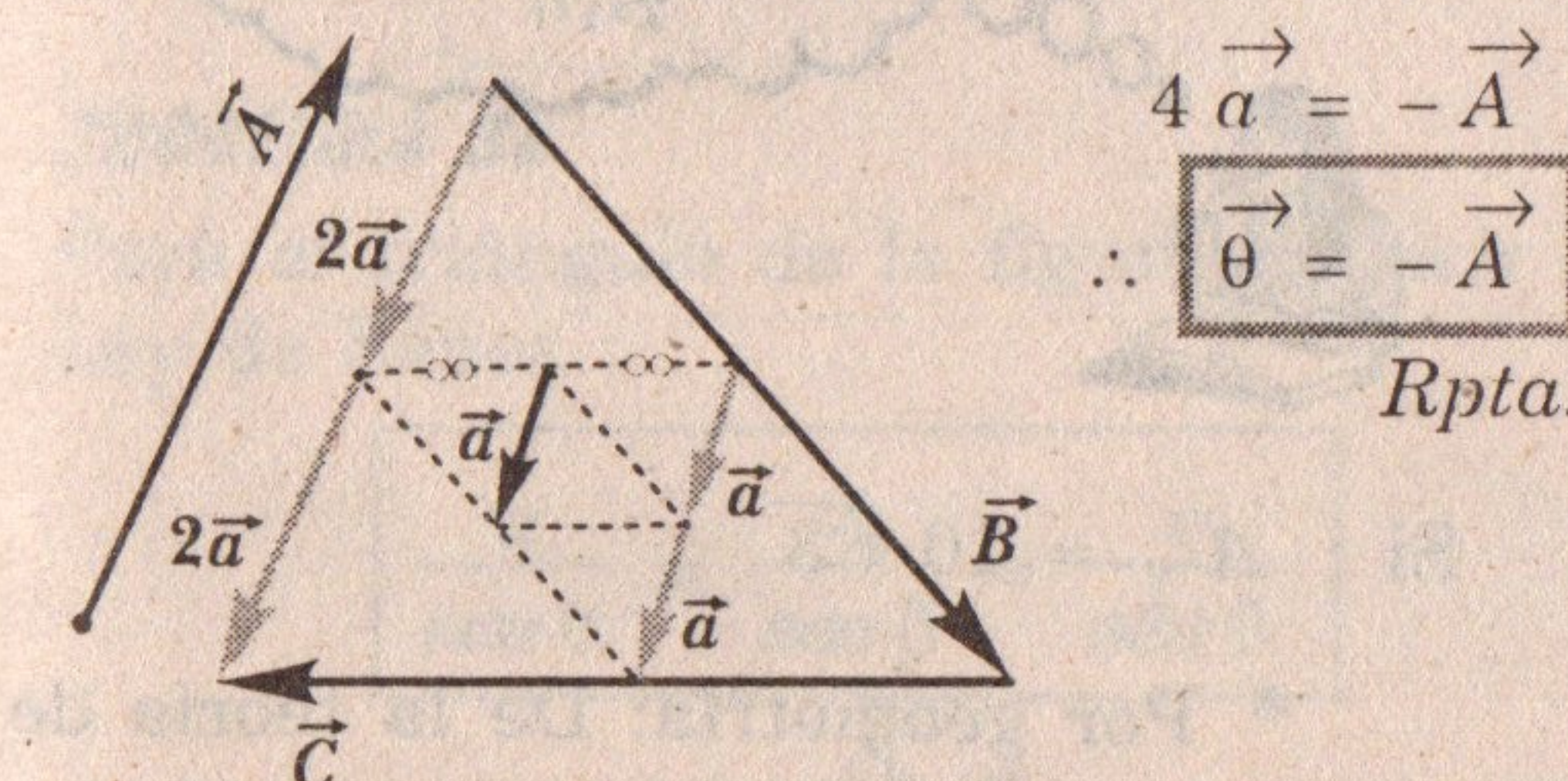
$$\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$$

Luego :

$$\vec{\theta} = 3\vec{a} - (-\vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{\theta} = 4\vec{a}$$

Haciendo uso de la geometría :



$$4\vec{a} = -\vec{A}$$

$$\therefore \vec{\theta} = -\vec{A}$$

Rpta.

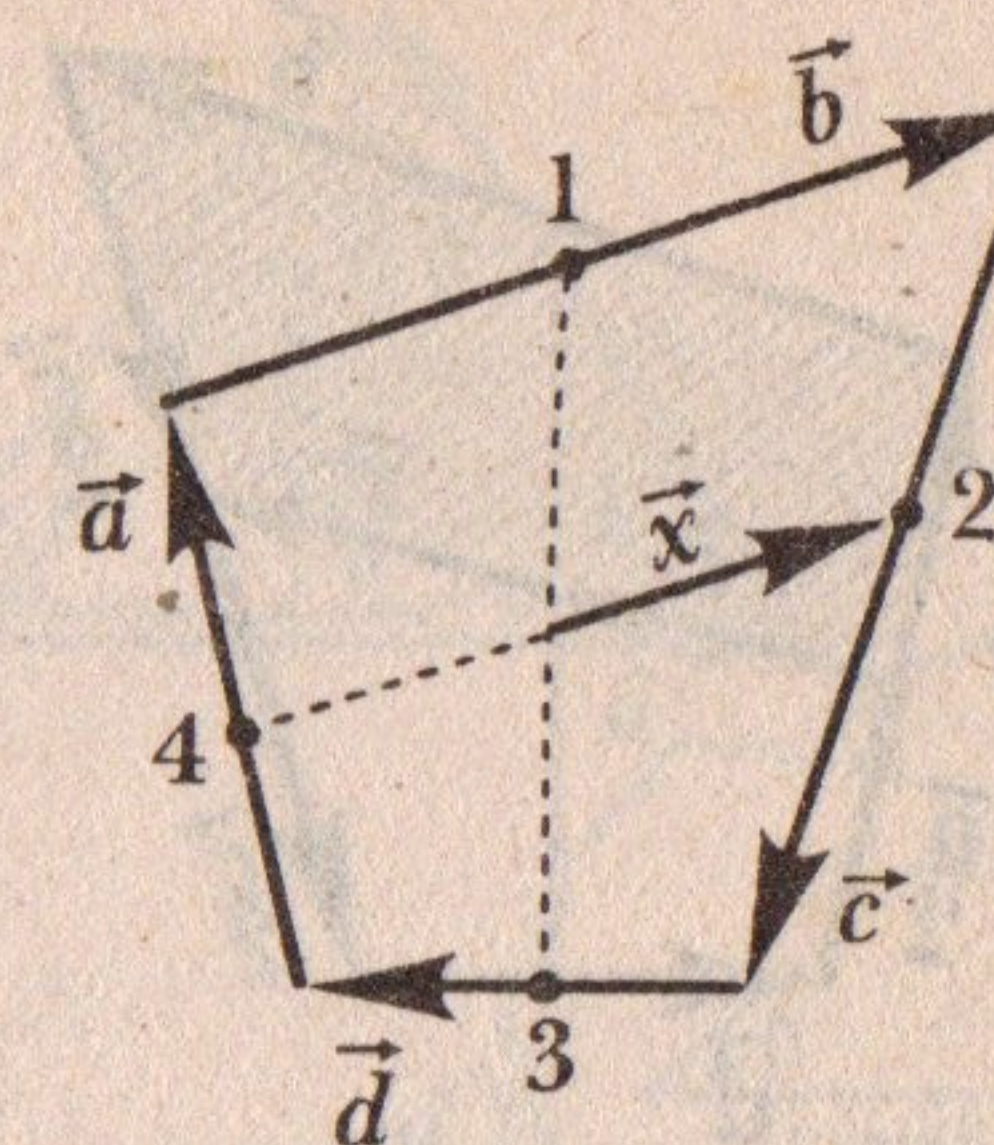
También :  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

Luego :  $\vec{\theta} = \vec{B} + \vec{C}$  Rpta.

Clave: E

**PROBLEMA 34**

En la figura mostrada 1, 2, 3 y 4 son puntos medios de los segmentos dados, determine  $\vec{x}$  en función de  $\vec{b}$  y  $\vec{d}$ .



A)  $\frac{\vec{b} - \vec{d}}{2}$

B)  $\frac{\vec{b} - \vec{d}}{4}$

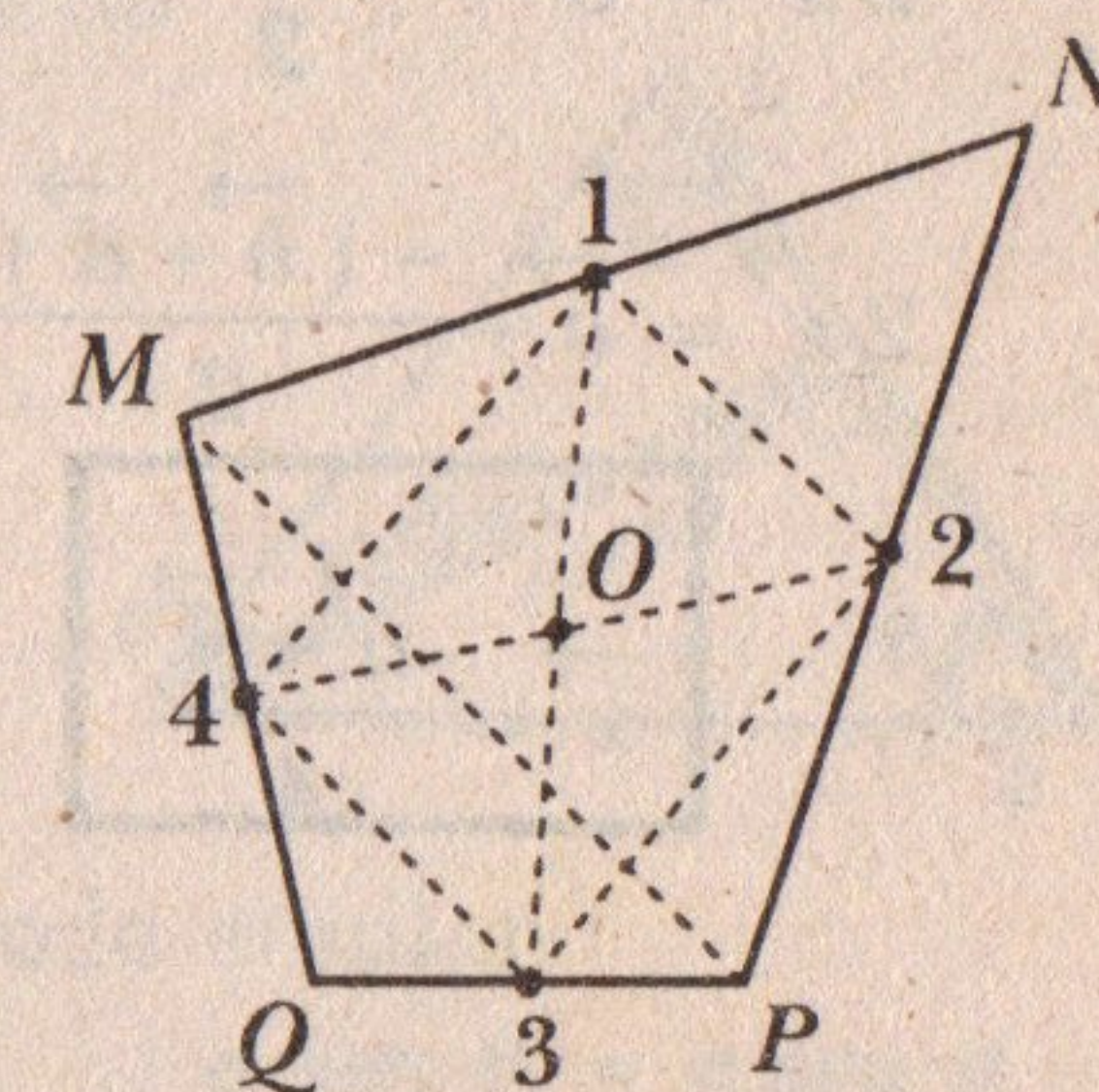
C)  $\frac{\vec{d} - \vec{b}}{2}$

D)  $\frac{\vec{d} - \vec{b}}{4}$

E)  $\frac{\vec{b} + \vec{d}}{4}$

**RESOLUCIÓN**

Haremos uso de la geometría.



\* 1234 : Será un paralelogramo porque

$$\vec{12} = \vec{43} = \frac{\vec{MP}}{2} (\Delta MNP)$$

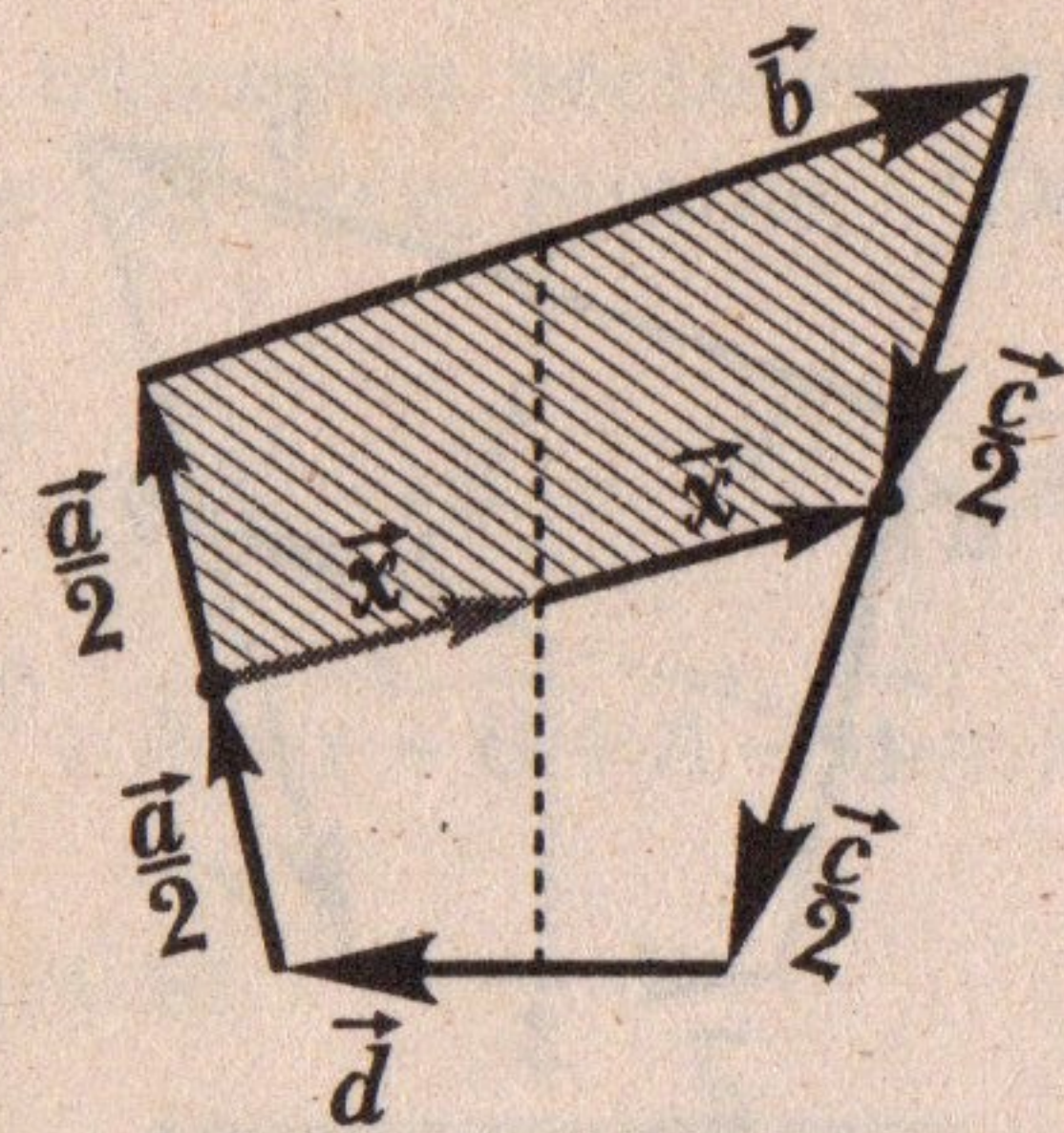
\* De modo similar

$$\vec{14} = \vec{23}$$

\*  $\vec{13}$  y  $\vec{42}$  : Serán diagonales y "O" su intersección.

Redibujamos :





$$* \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$$

$$\vec{b} + \vec{d} = -(\vec{a} + \vec{c})$$

En la región sombreada :

$$2\vec{x} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$$

$$2\vec{x} = \vec{b} + \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

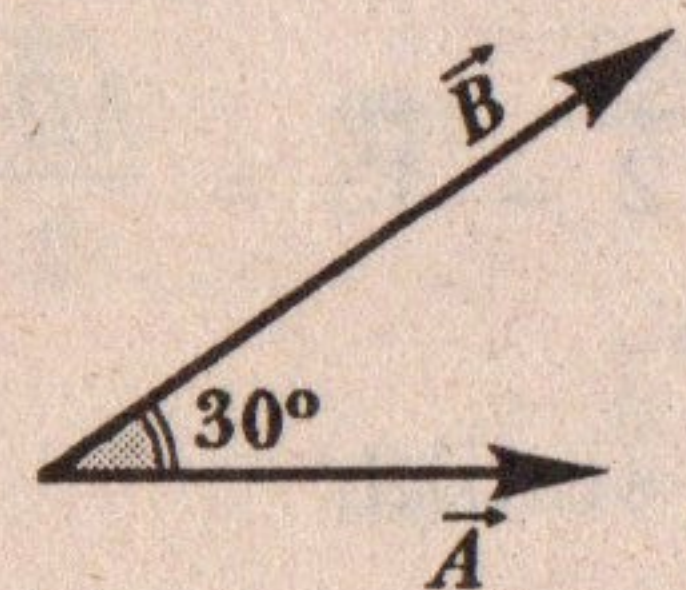
$$2\vec{x} = \vec{b} + \frac{-(\vec{b} + \vec{d})}{2}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{\vec{b} - \vec{d}}{4}$$

Clave: B

**PROBLEMA 35** (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

Dado el conjunto de vectores de la figura :



a) Determine la magnitud de  $\vec{A}$  si la magnitud de su componente en la dirección de  $\vec{B}$  es  $10\sqrt{3}$

b) Determine la componente de  $\vec{A}$  en la dirección perpendicular a  $\vec{B}$ . Dibuje dicha componente.

c) Si  $|\vec{B}| = 5\sqrt{3}$ , determine la magnitud de la componente de  $\vec{B}$  en la dirección de  $\vec{A}$ . Dibuje dicha componente.

A) 20 ; 10 ; 7,5

B) 10 ; 20 ; 7

C) 20 ; 10 ; 10

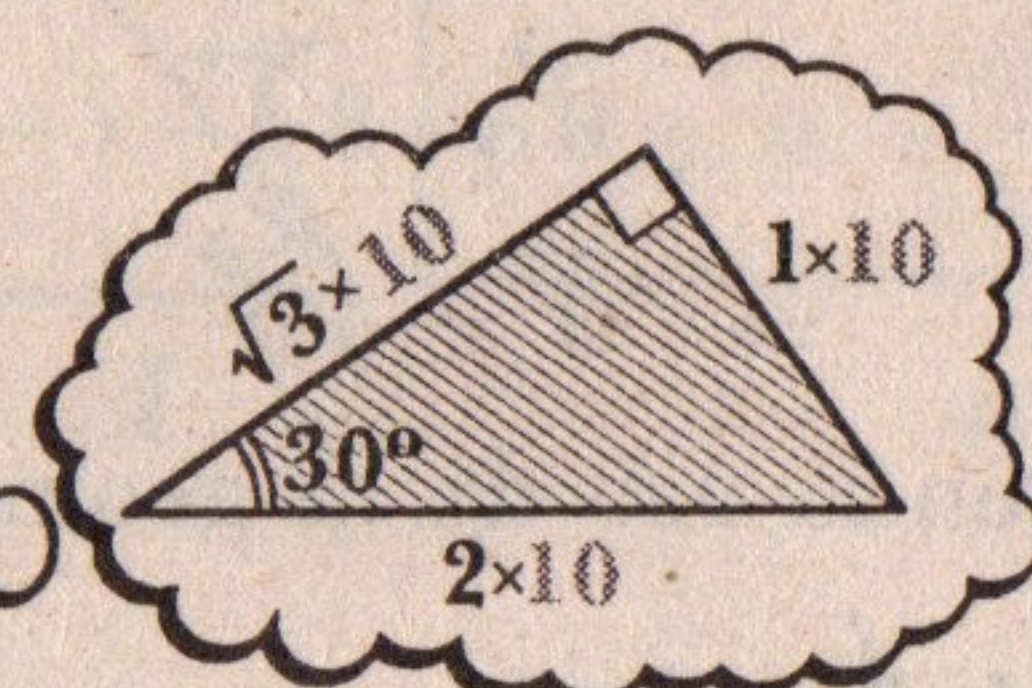
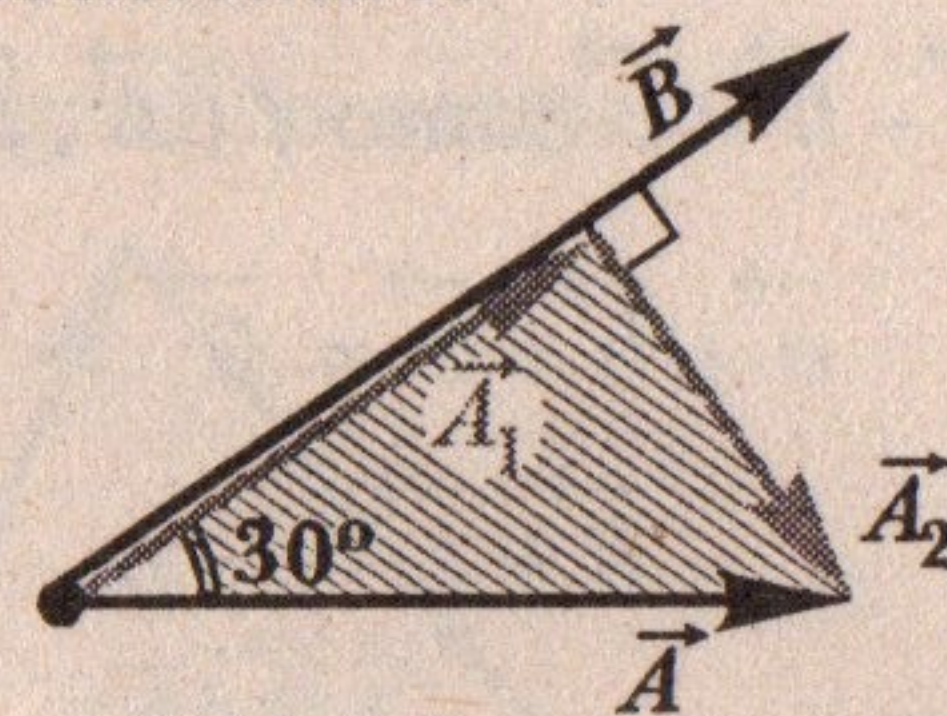
D) 10 ; 10 ; 20

E) 20 ; 7,5 ;  $10\sqrt{3}$

**RESOLUCIÓN**

a)  $A = ??$  ; si la magnitud de la componente de  $\vec{A}$  en  $\vec{B}$  es  $10\sqrt{3}$ .

Graficamos :



$$\text{Si : } A_1 = 10\sqrt{3}$$

\* Por geometría: De la teoría de los  $\Delta_s$  notables ( $30^\circ$  y  $60^\circ$ ), hallamos :

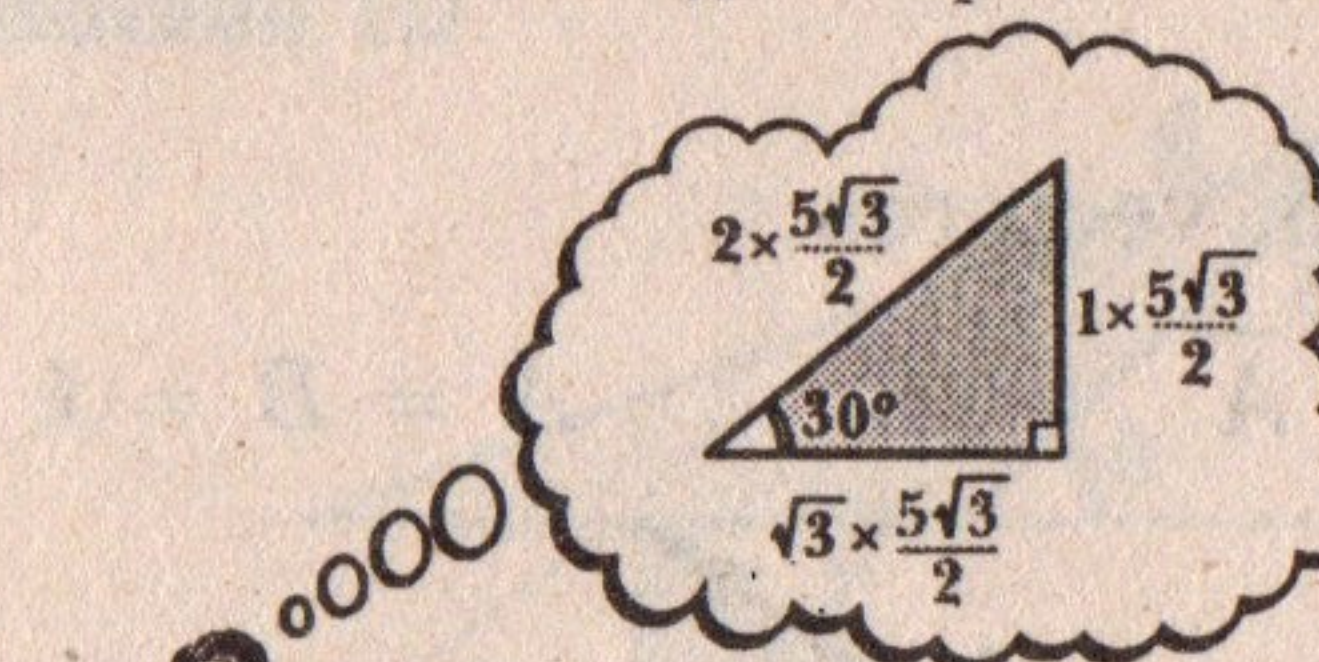
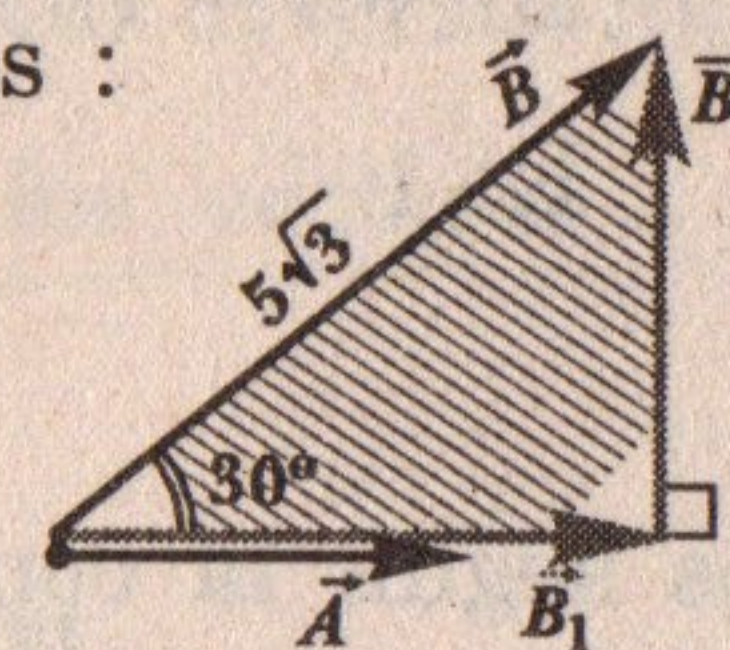
$$\boxed{A = 20} \text{ Rpta.}$$

b) En la figura anterior " $\vec{A}_2$ " será la componente de  $\vec{A}$  en la dirección perpendicular de  $\vec{B}$

$$\text{Luego : } \boxed{A_2 = 10} \text{ Rpta.}$$

c) Si  $B = 5\sqrt{3}$ , hallaremos " $B_1$ " que será la magnitud de la componente de " $\vec{B}$ " en la dirección de " $\vec{A}$ ".

Graficamos :



Por geometría: de los  $\Delta_s$  notables.

$$B_1 = \sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

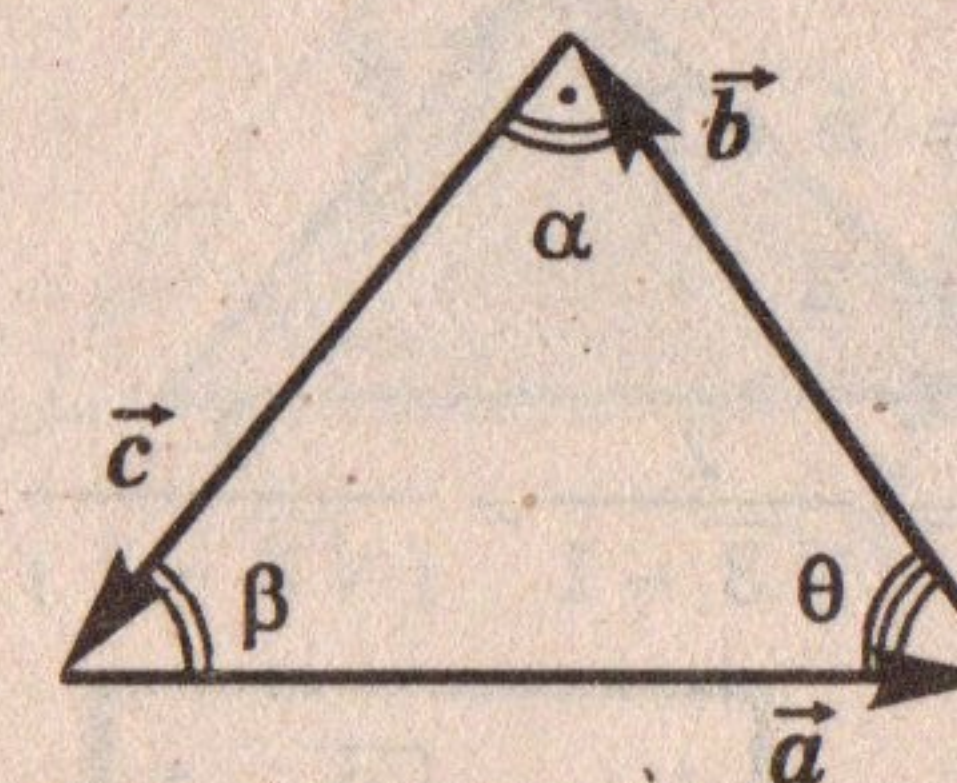
$$\therefore \boxed{B_1 = 7,5} \text{ Rpta.}$$

Clave: A

**PROBLEMA 36**

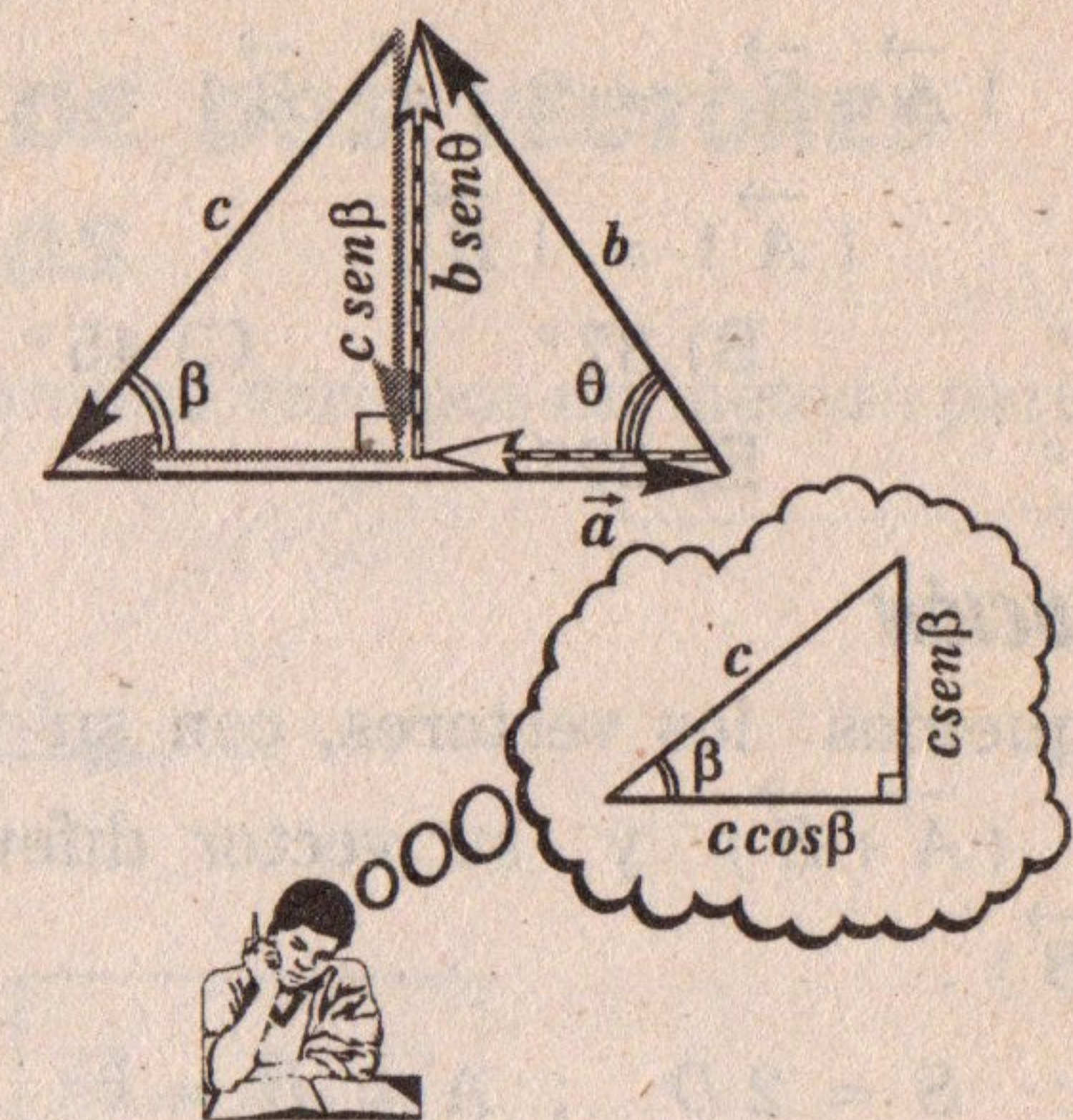
Para el triángulo de la figura deducir la Ley de Senos :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$



**RESOLUCIÓN**

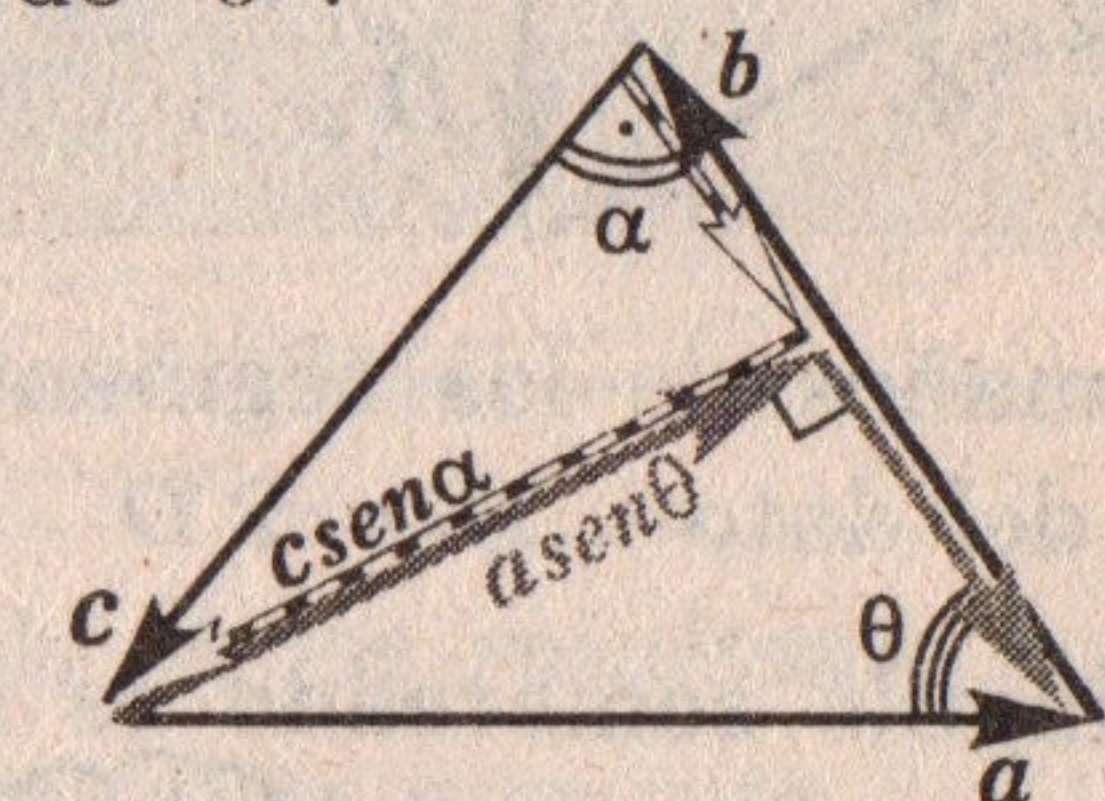
1) Descomponemos los vectores  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  en la dirección de  $\vec{a}$  y su perpendicular.



\* Recordando trigonometría, Observamos :

$$\begin{aligned} c \sin \beta &= b \sin \theta \\ \frac{c}{\sin \theta} &= \frac{b}{\sin \beta} \quad \dots (I) \end{aligned}$$

2) Descomponemos ahora en la dirección de  $\vec{b}$ .



De modo similar :

$$\begin{aligned} a \sin \theta &= c \sin \alpha \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \theta} \quad \dots (II) \end{aligned}$$

Igualando (I) y (II) :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta} \text{ L.q.q.d.}$$

**Nota:**

Otro método de solución, ver problema N°132.

**PROBLEMA 37**

Determinese el ángulo que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  si se cumple que :



$$|\vec{A} + \vec{B}| = 2|\vec{A} - \vec{B}|$$

$$|\vec{A}| = |\vec{B}|$$

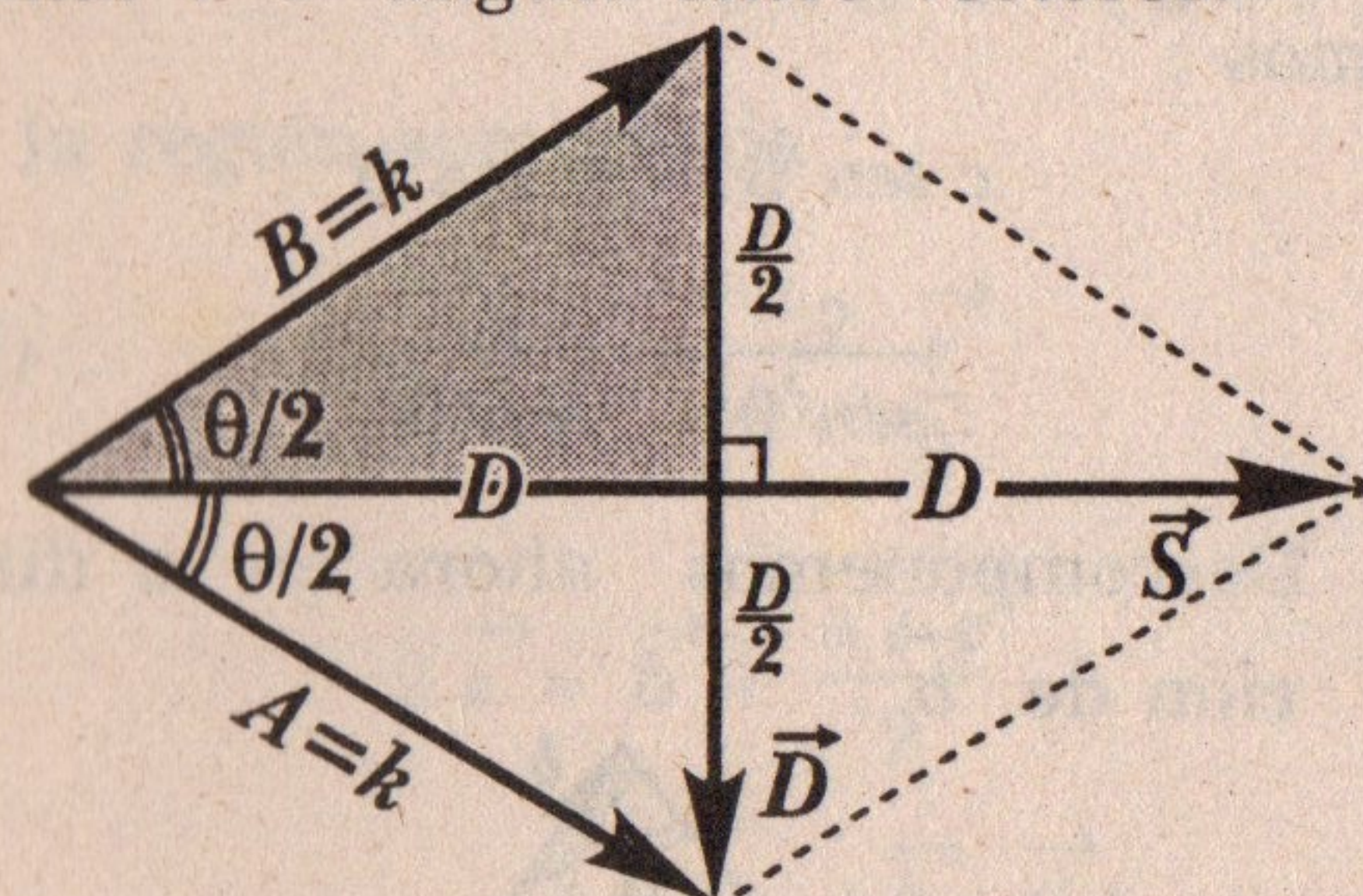
- A)  $30^\circ$       B)  $37^\circ$       C)  $45^\circ$   
 D)  $53^\circ$       E)  $60^\circ$

**RESOLUCIÓN**

Grafiquemos los vectores, con su vector suma  $(\vec{A} + \vec{B})$  y su vector diferencia  $(\vec{A} - \vec{B})$ .

Dato:  $S = 2D$  ;  $A = B = k$

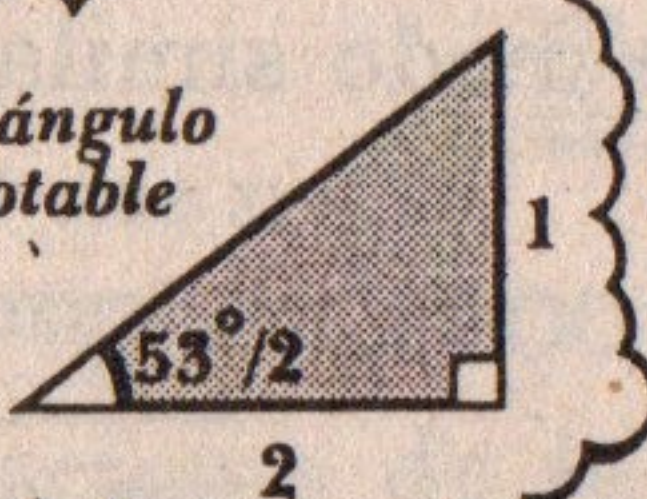
Hallar: " $\theta$ " ángulo entre vectores.



\* Los tamaños de los segmentos se obtienen del dato:  $S = 2D$ .

\* El triángulo sombreado es semejante a:

Triángulo notable



Luego:  $\frac{\theta}{2} = \frac{53^\circ}{2}$

$\therefore \theta = 53^\circ$

**Clave: D**

**PROBLEMA 38** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Dos vectores de igual módulo forman entre sí un ángulo de  $60^\circ$ , si la magnitud de la resultante de ambos vectores

es 2 unidades mayor que el módulo de uno de los vectores. Halle dicho módulo.

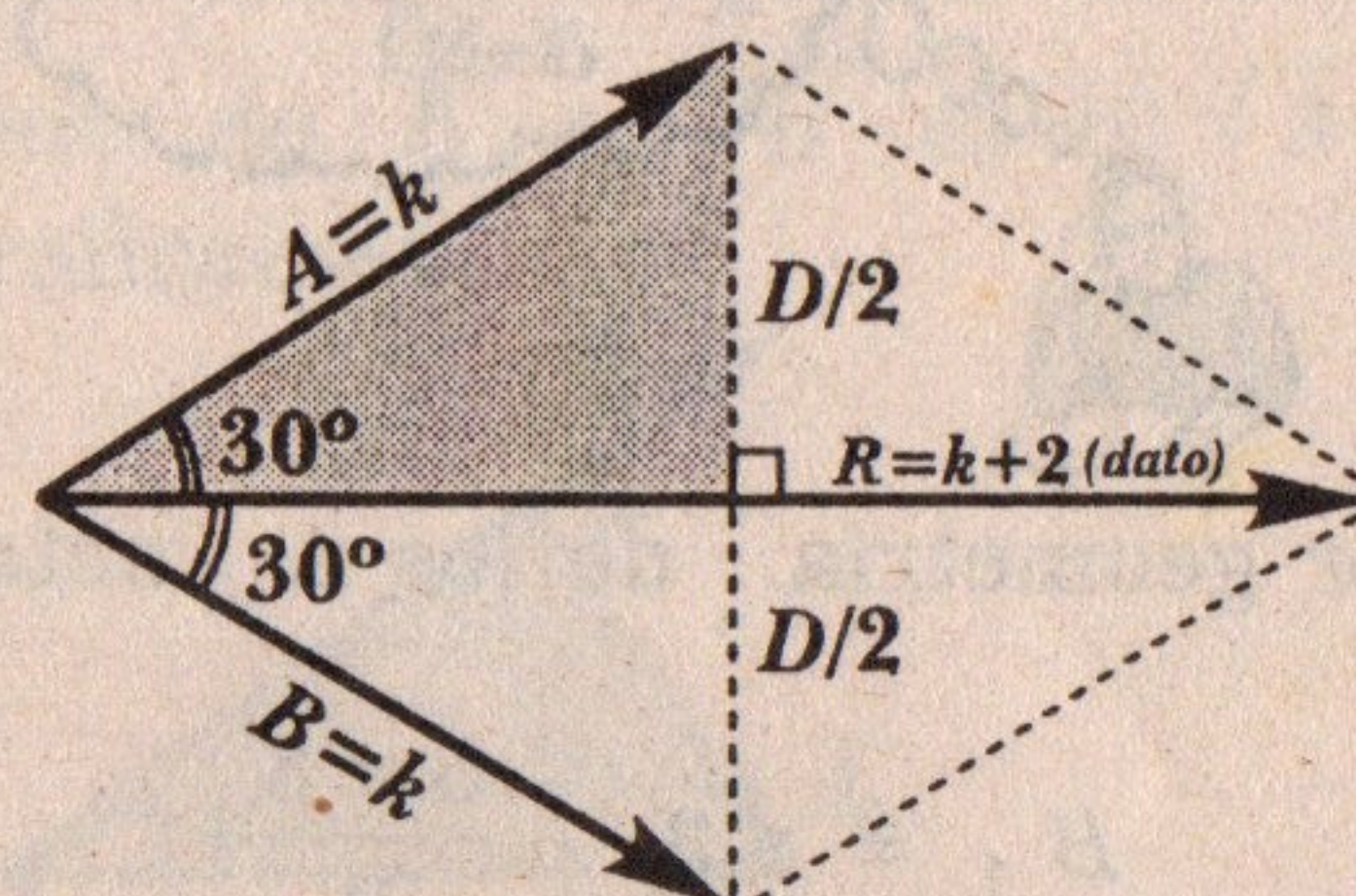
- A)  $\sqrt{3} - 1$       B)  $\sqrt{3} + 1$       C)  $\sqrt{3}$   
 D)  $\sqrt{3} + 2$       E) 1

**RESOLUCIÓN**

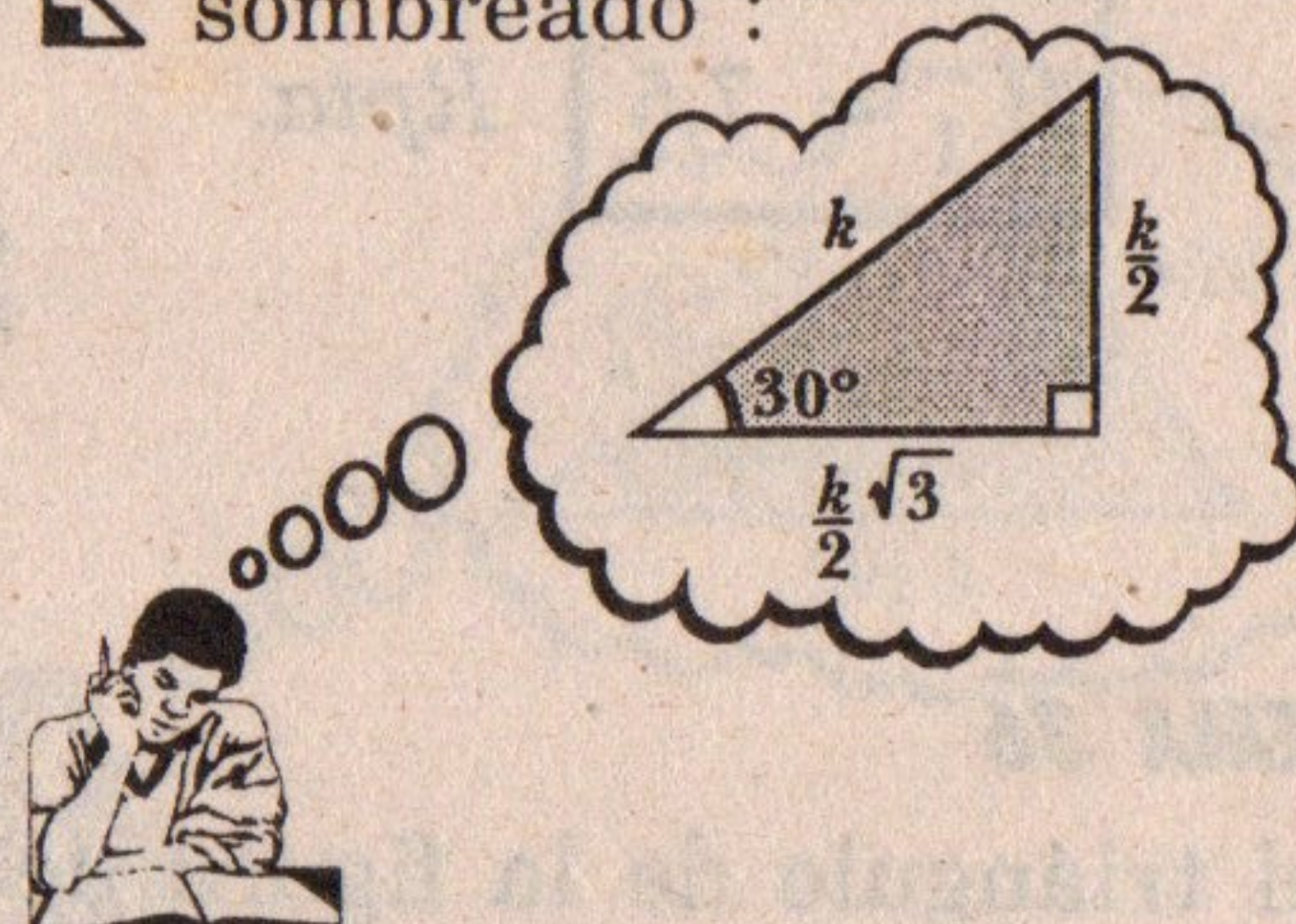
Grafiquemos según la condición del problema.

Sean los vectores:

$$\vec{A} \text{ y } \vec{B} ; A = B = k$$



En el sombreado:



Luego:  $R = \frac{k}{2}\sqrt{3} + \frac{k}{2}\sqrt{3} = k\sqrt{3}$

Igualando:

$$k\sqrt{3} = k + 2$$

$$k(\sqrt{3} - 1) = 2$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{(\sqrt{3} - 1)} \times \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)}$$

Resolviendo:  $k = \sqrt{3} + 1$

**Clave: B**

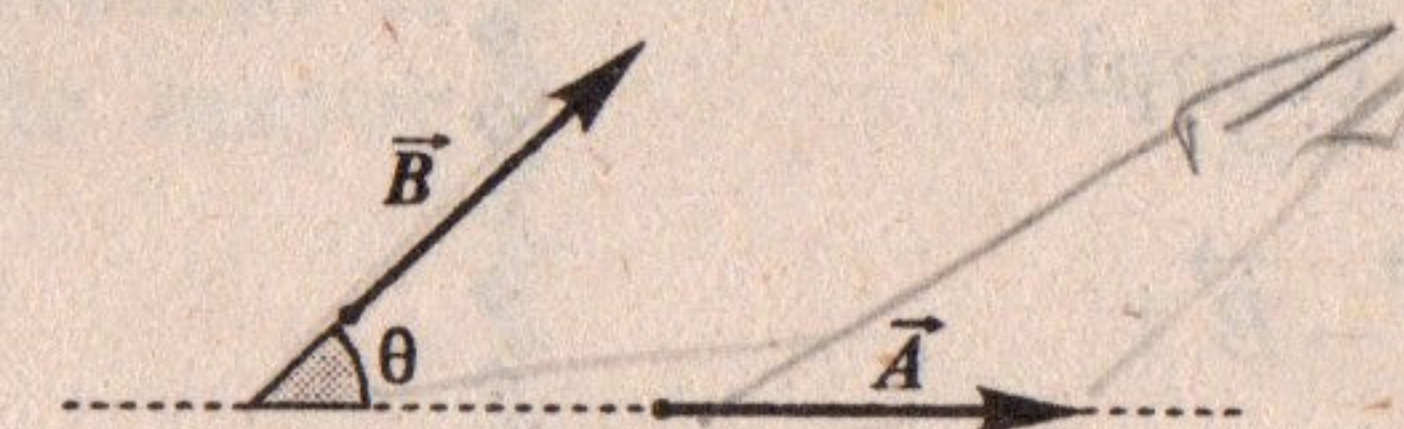
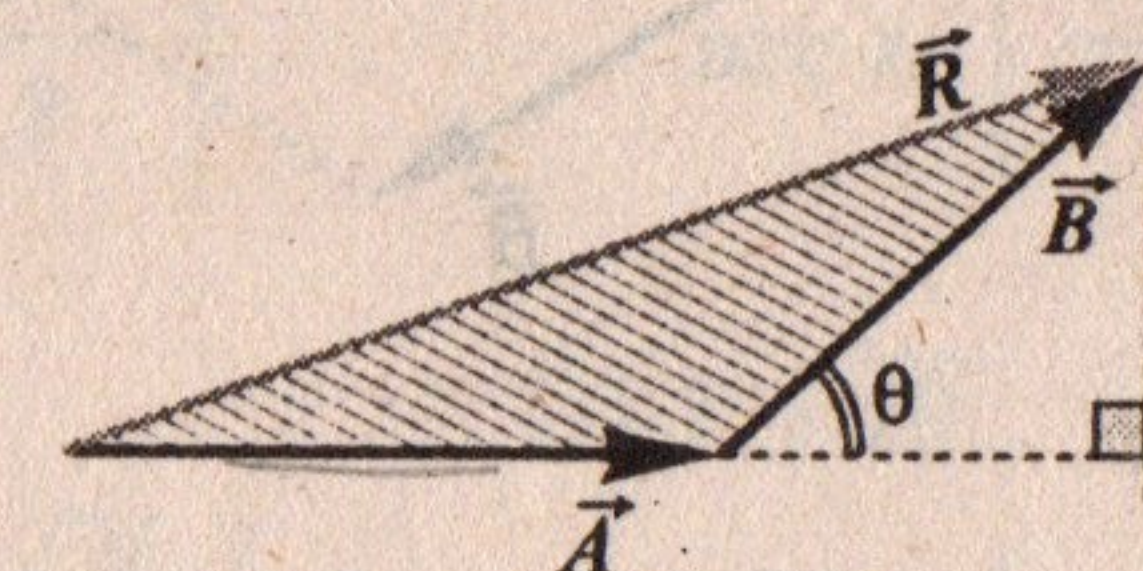
**Nota:**

Los problemas 37 y 38 pueden ser resueltos de otra manera. Ver problema 39-40.

## CÁLCULO DE LA RESULTANTE DE DOS VECTORES NO PARALELOS

Se pueden aplicar diversos métodos, en esta oportunidad veremos un método particular.

Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  los vectores:

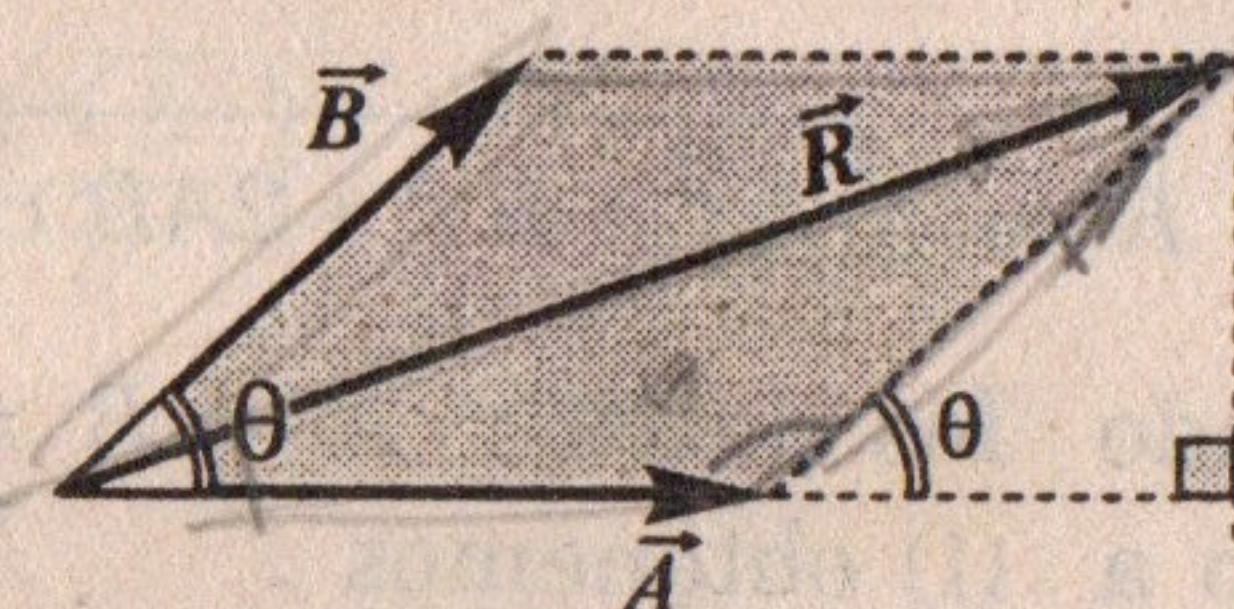
**Método (1)**

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

¡Método del triángulo!

**Método (2)**

Formamos un paralelogramo.



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

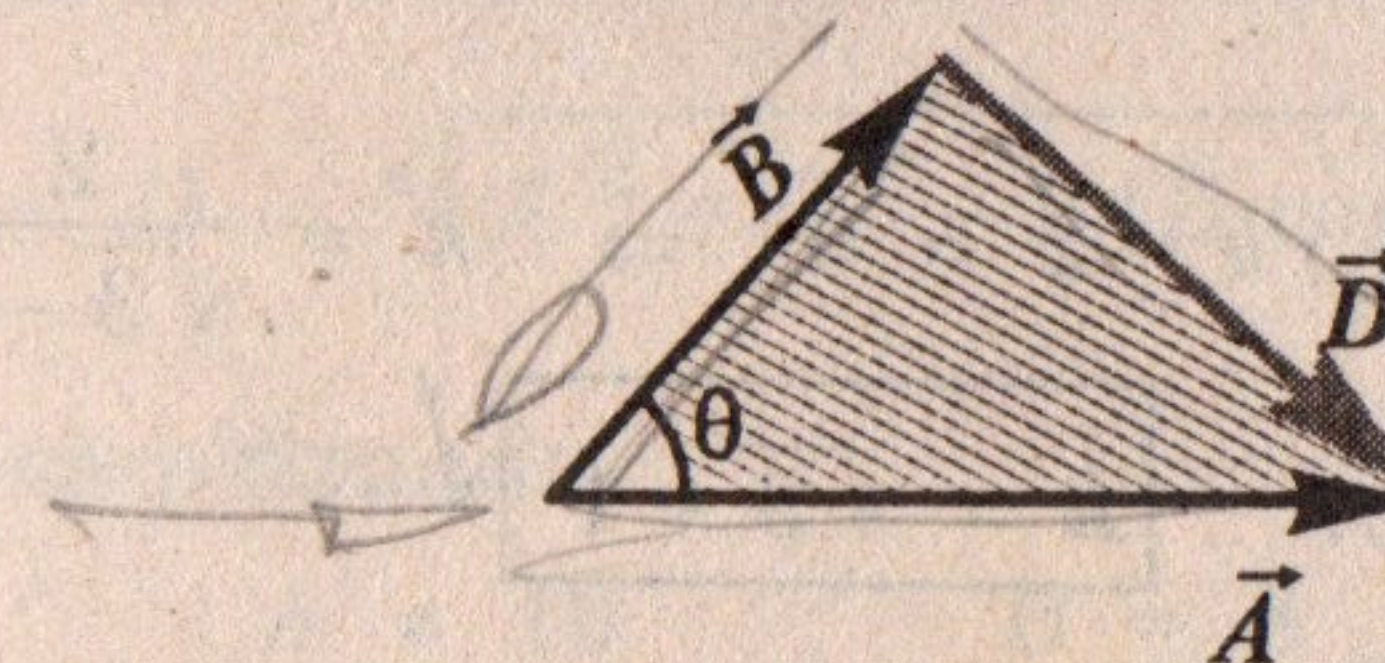
El módulo de  $\vec{R}$  será

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

**Observación**

- \* Si el ángulo " $\theta$ " varía, también el módulo de la resultante cambia.
- \* Si  $\theta$  es más pequeño el módulo de la resultante aumenta.
- \* Si " $\theta$ " se acerca a  $180^\circ$  el módulo de la resultante disminuye.

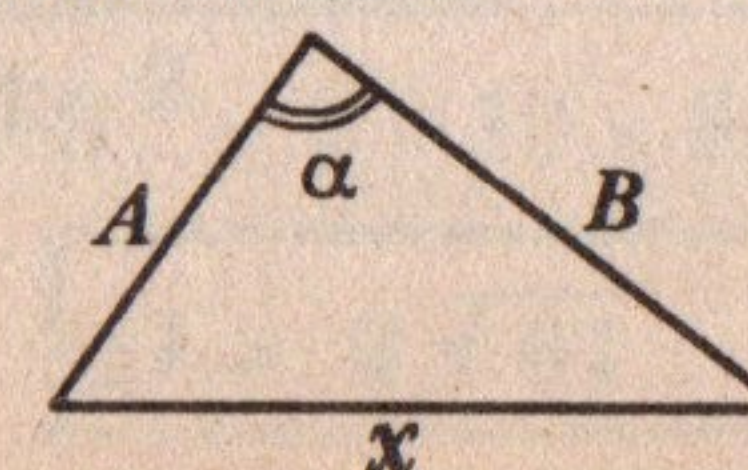
## CÁLCULO DEL VECTOR DIFERENCIA



\*  $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ , el módulo se calcula por:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

**Nota:**

**Ley de Cosenos**

$$x = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha}$$



# **PROBLEMAS RESUELTOS**

## **PROBLEMA 39**

Determinése el ángulo que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , si se cumple:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 2|\vec{A} - \vec{B}|;$$

$$|\vec{A}| = |\vec{B}|$$

A)  $30^\circ$       B)  $37^\circ$       C)  $45^\circ$

D)  $53^\circ$       E)  $60^\circ$

## **RESOLUCIÓN**

Por dato:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 2|\vec{A} - \vec{B}|$$

$$S = 2D$$

Si  $A = B = k$

Por las ecuaciones: Método del paralelogramo.

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = 2\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

$$\sqrt{k^2 + k^2 + 2k^2 \cos \theta} = 2\sqrt{k^2 + k^2 - 2k^2 \cos \theta}$$

Elevando al cuadrado y operando

$$2 + 2 \cos \theta = 8 - 8 \cos \theta$$

$$\cos \theta = 3/5$$

$$\therefore \theta = 53^\circ$$

Clave: D

## **PROBLEMA 40**

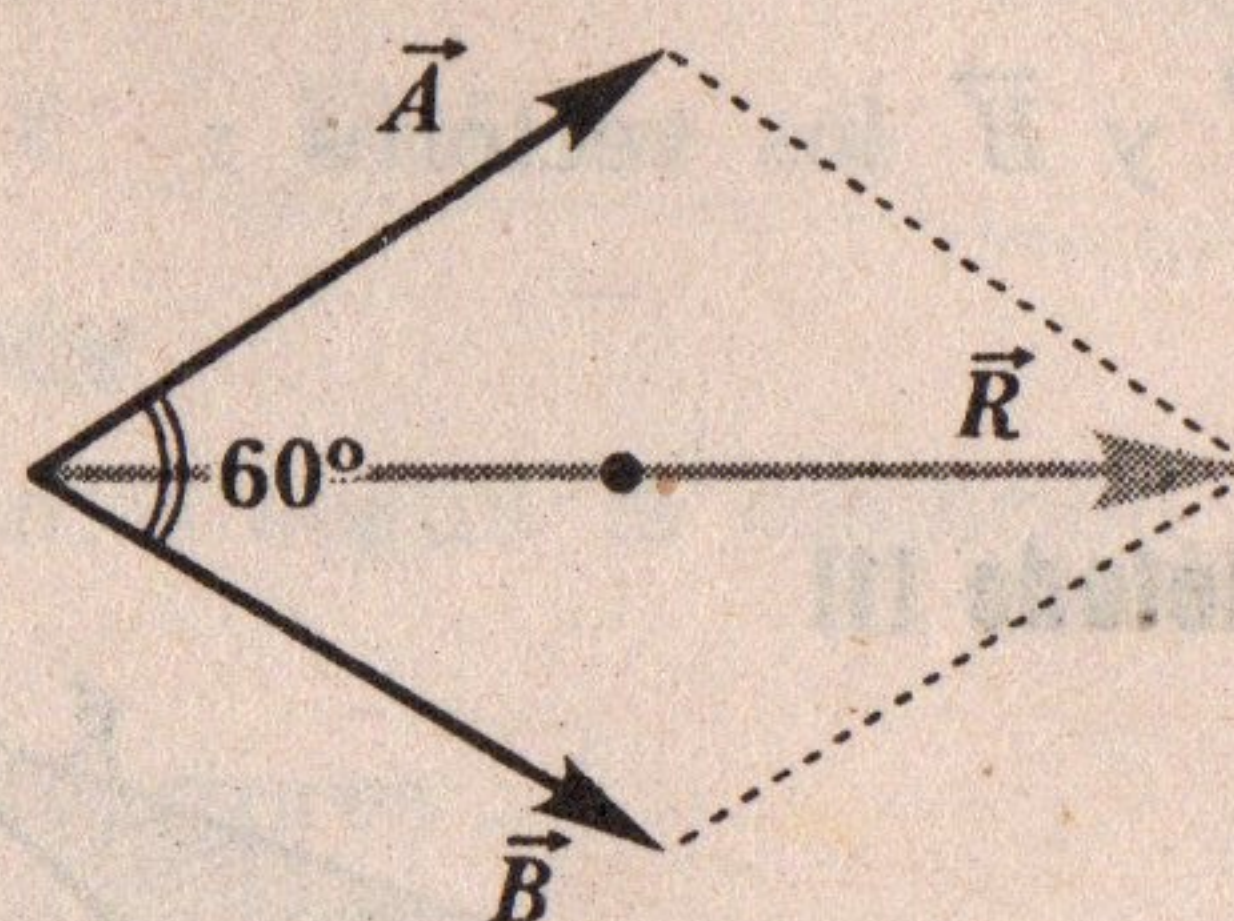
Dos vectores de igual módulo forman entre sí un ángulo de  $60^\circ$ . Si la magnitud de la resultante de ambos vectores es 2 unidades mayor que el módulo de uno de los vectores. Halle dicho módulo

A)  $\sqrt{3} - 1$       B)  $\sqrt{3} + 1$       C)  $\sqrt{3}$

D)  $\sqrt{3} + 2$       E) 1

## **RESOLUCIÓN**

Grafiquemos:



Dato:

$$* A = B = k$$

$$* R = k + 2 \quad \dots (I)$$

Aplicando la fórmula del paralelogramo:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 60^\circ}$$

Usando los datos:  $A = B = k$  e igualando a (I) obtenemos.

$$\sqrt{k^2 + k^2 + 2k^2 \times \frac{1}{2}} = k + 2$$

Resolviendo:

$$3k^2 = (k + 2)^2$$

$$3k^2 - (k + 2)^2 = 0$$

$$[\sqrt{3}k - (k + 2)][\sqrt{3}k + k + 2] = 0$$

Luego:

$$* (\sqrt{3} - 1)k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\therefore k = \sqrt{3} + 1$$

$$* * k(\sqrt{3} + 1) = -2$$

$$\therefore k = -\frac{2}{\sqrt{3} + 1} \quad \times$$

¡No puede ser!

("k" es positivo)

Clave: B

## **PROBLEMA 41**

Dos vectores de 10 y 8 unidades forman entre sí un ángulo de  $120^\circ$ . Encontrar la magnitud de la diferencia de dichos vectores y el ángulo que forma el vector diferencia con el vector de mayor módulo.

A)  $4\sqrt{61}$

B)  $5\sqrt{61}$

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$$

C)  $3\sqrt{60}$

D)  $7\sqrt{19}$

$$\arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$$

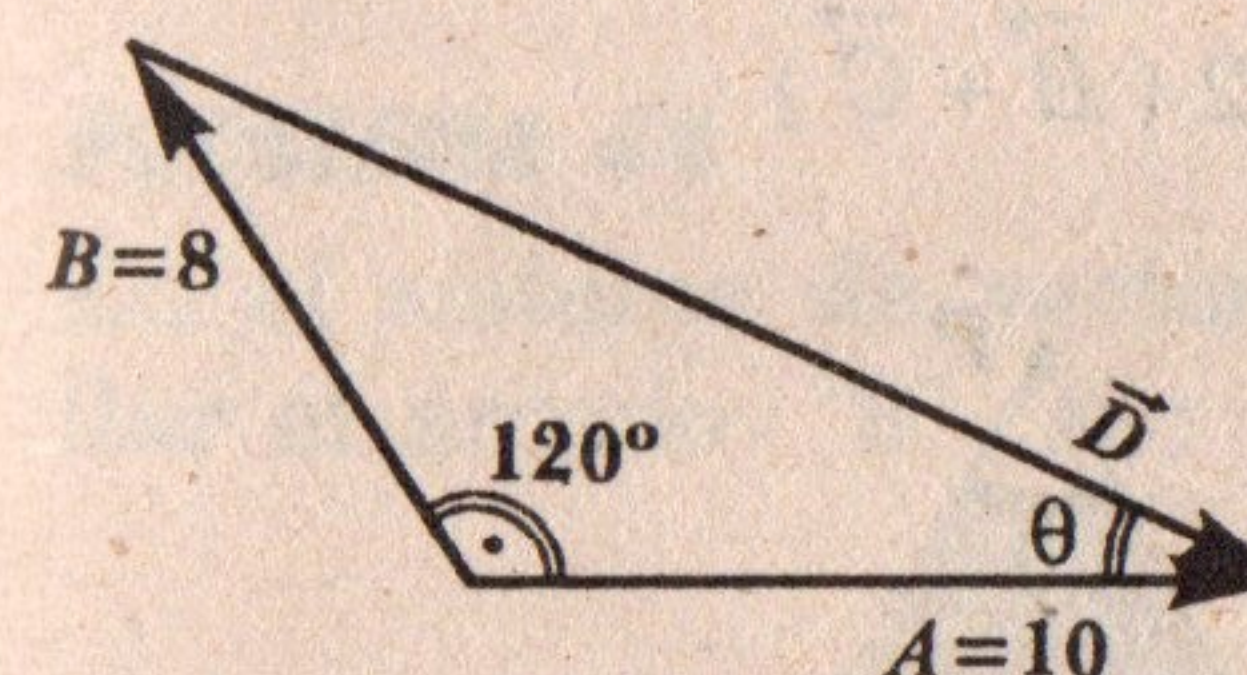
$$\arctg\left(\frac{2}{7\sqrt{3}}\right)$$

E)  $2\sqrt{61}$

$$\arctg\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$$

## **RESOLUCIÓN**

Graficamos:



$$* \vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$D = ??$$

Por la Ley de cosenos:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos 120^\circ}$$

Reemplazando:

$$A = 10; \quad B = 8 \quad y$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$D = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore D = 2\sqrt{61}$$

Calculo de " $\theta$ ":

Por Ley de Senos

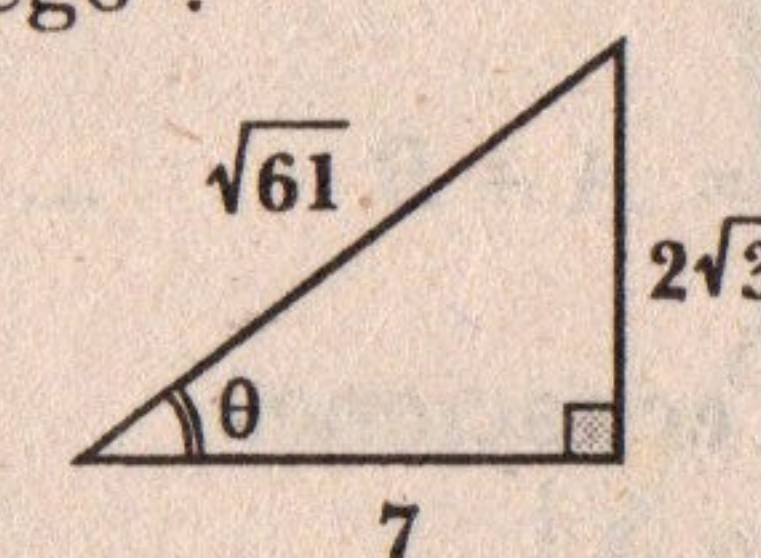
$$\frac{8}{\sin \theta} = \frac{2\sqrt{61}}{\sin 120^\circ}$$

$$* \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Reemplazando y operando:

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{61}}$$

Luego:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \theta = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

Clave: C

## **PROBLEMA 42**

El módulo de la resultante de 2 vectores varía entre un valor máximo de 12 unidades y un mínimo de 8 unidades.

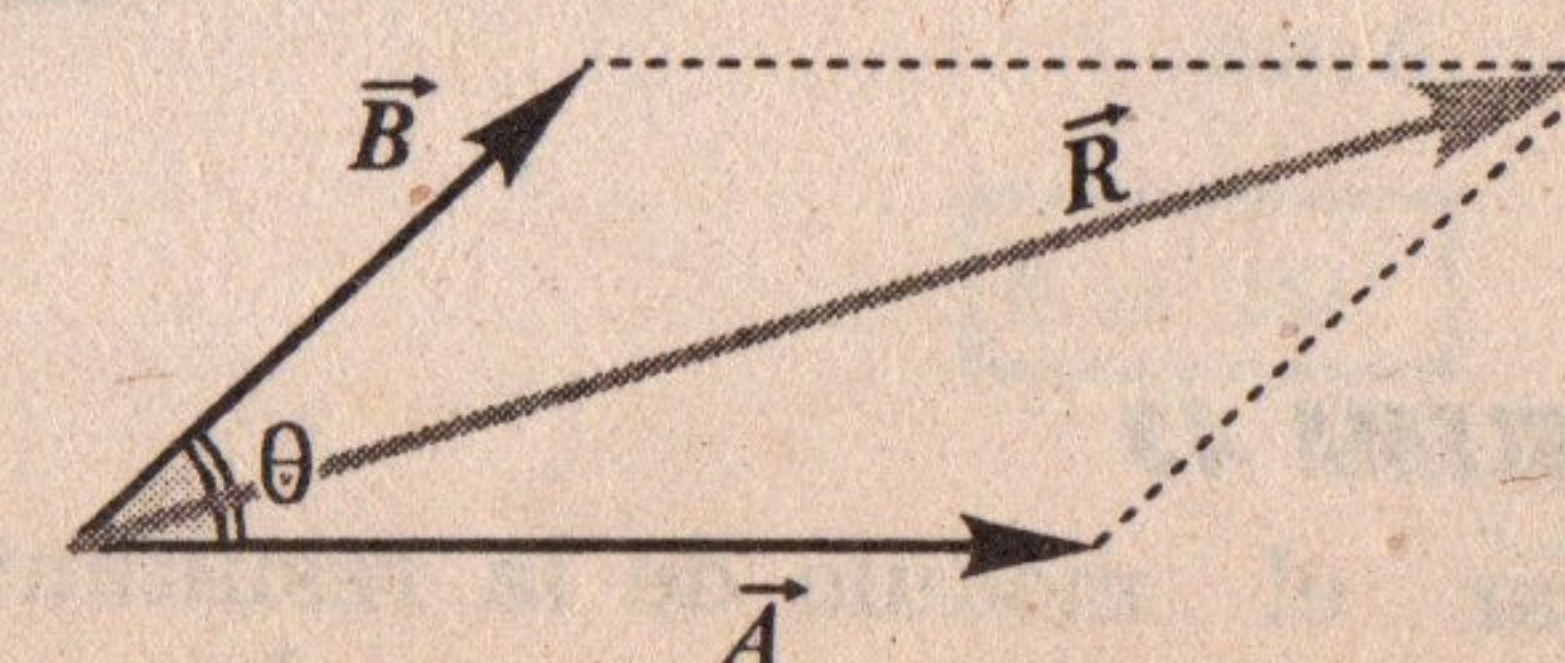
Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de  $53^\circ$ .

A)  $8u$       B)  $8\sqrt{3}u$       C)  $4\sqrt{2}u$

D)  $2\sqrt{34}u$       E)  $8\sqrt{2}u$

## **RESOLUCIÓN**

Sean los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$





Si el ángulo " $\theta$ " variara, entonces :

a) Si  $\theta = 0^\circ$  ; La " $R$ " es máxima.

$$\vec{B} \quad \vec{A} \quad R_{\text{máx}} = A + B$$

b) Si  $\theta = 180^\circ$  ; La " $R$ " es mínima.

$$\vec{B} \quad \vec{A} \quad R_{\text{mín}} = A - B$$

En el problema :

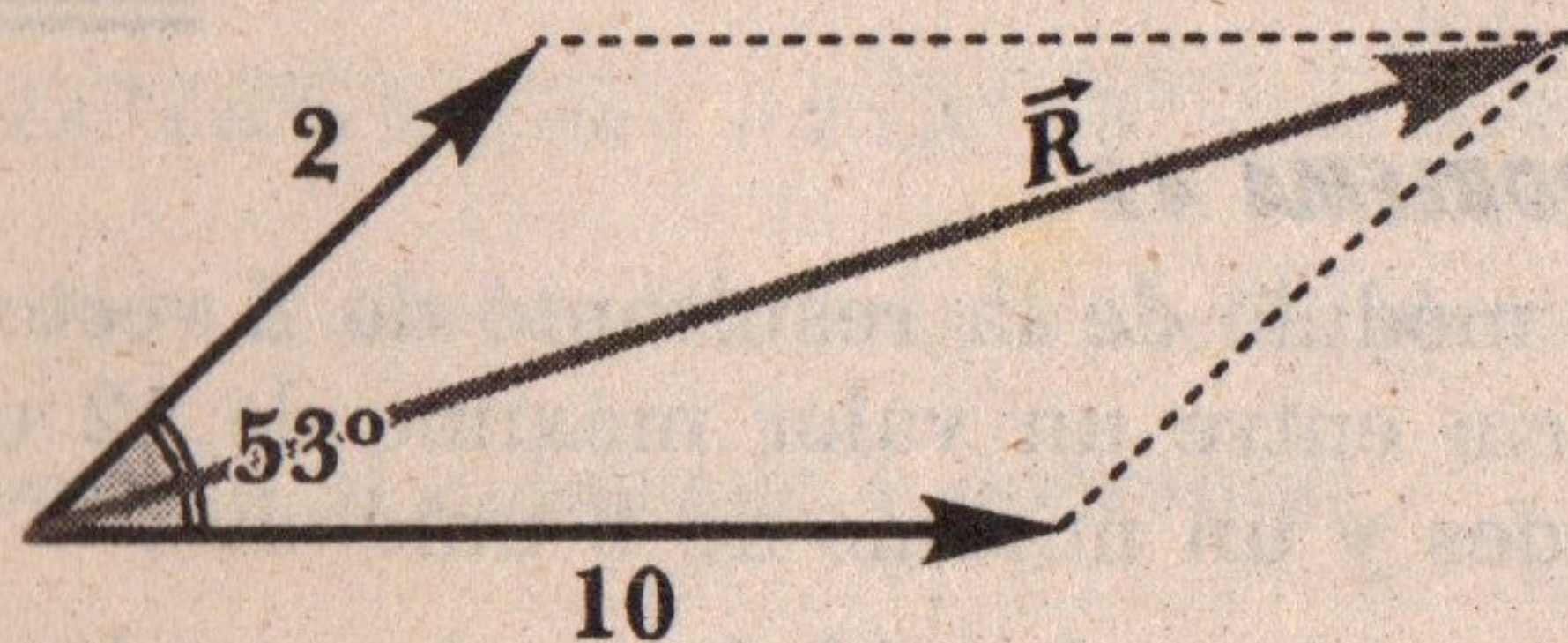
$$R_{\text{mín}} = 8 = A - B \quad \dots (I)$$

$$R_{\text{máx}} = 12 = A + B \quad \dots (II)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones

$$\begin{cases} A = 10u \\ B = 2u \end{cases}$$

Nos piden :



$$R = \sqrt{10^2 + 2^2 + 2 \times 10 \times 2 \times \cos 53^\circ}$$

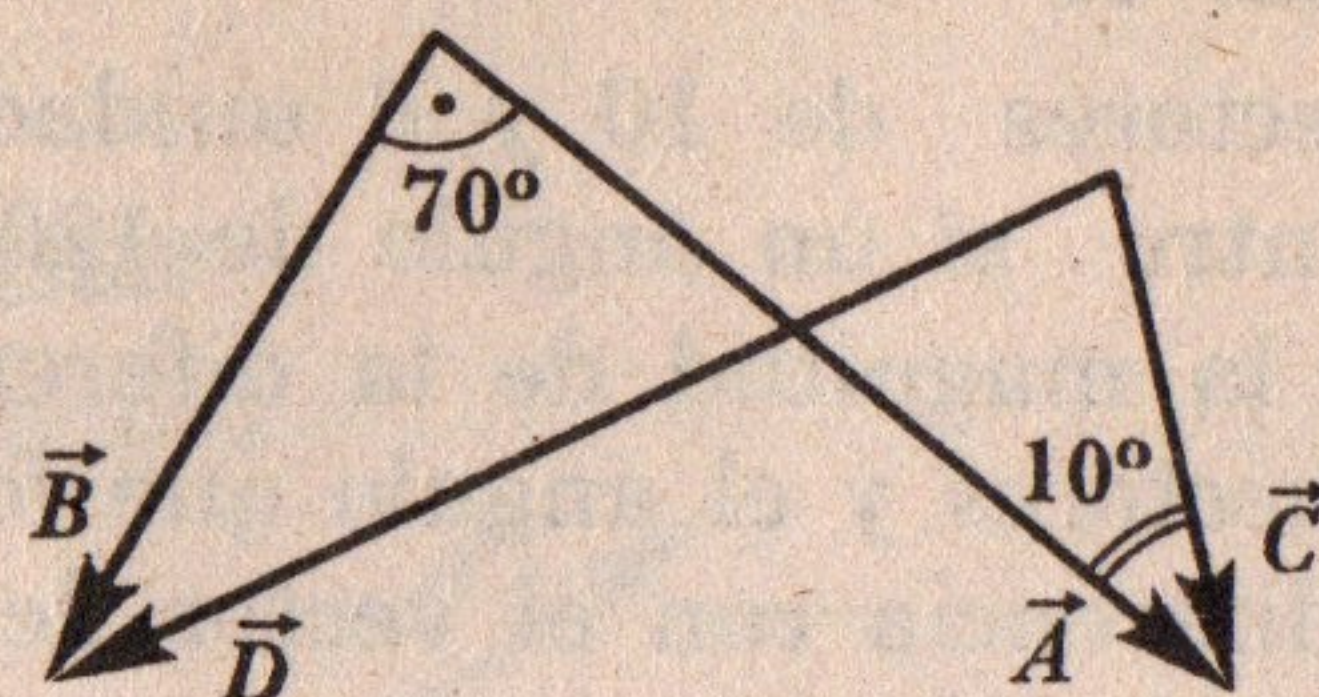
si  $\cos 53^\circ = \frac{3}{5}$  ; reemplazando :

$$R = 8\sqrt{2}u$$

Clave: E

### PROBLEMA 43

Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura, si  $B = 2u$  ,  $C = 3u$  ,  $D = 5u$ .



A)  $2\sqrt{19}u$

B)  $\sqrt{19}u$

C)  $\sqrt{19}/2u$

D)  $\sqrt{13}u$

E)  $\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}u$

### RESOLUCIÓN

En la figura se puede observar :

$$\vec{B} = \vec{A} - \vec{C} + \vec{D}$$

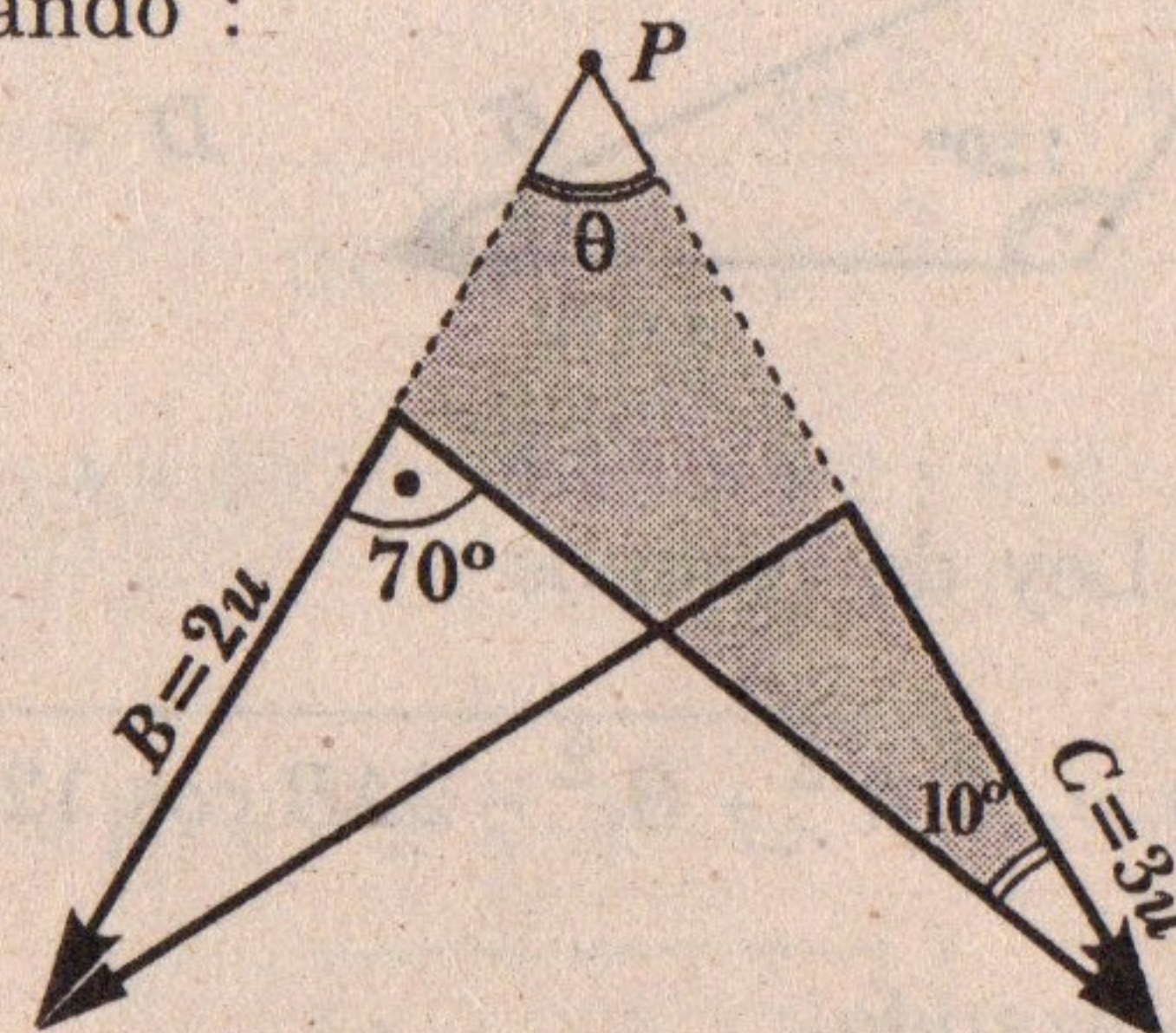
$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{A} + \vec{D}$$

Piden hallar la resultante.

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

$$\vec{R} = 2(\vec{B} + \vec{C})$$

Graficando :

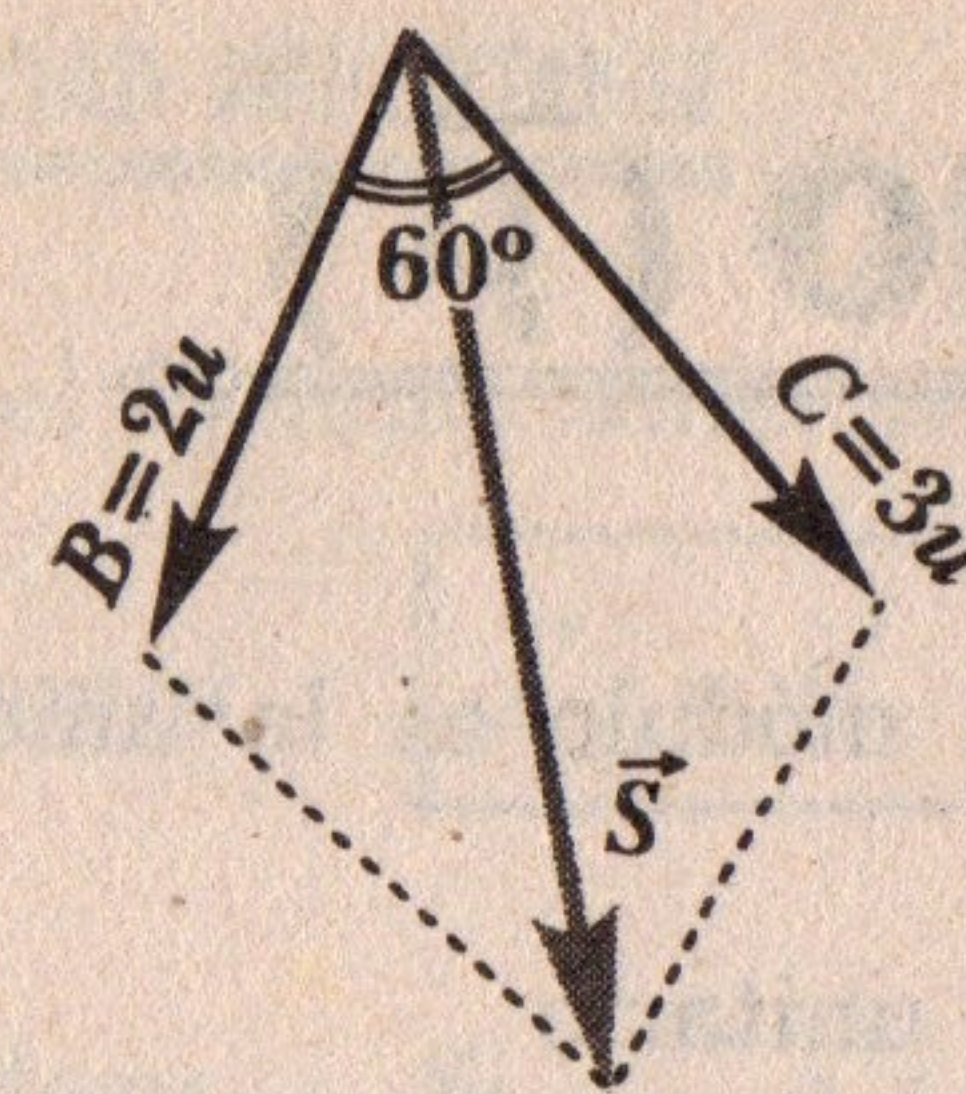


Por geometría :

$$\theta + 10^\circ = 70^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

Como la resultante esta en términos de  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  , unimos en el punto común " $P$ ".



Luego :

$$S = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ}$$

$$S = \sqrt{19}u$$

Es decir :  $|\vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{19}u$

Pero :  $|\vec{R}| = 2|\vec{B} + \vec{C}|$

$$\therefore R = 2\sqrt{19}u$$

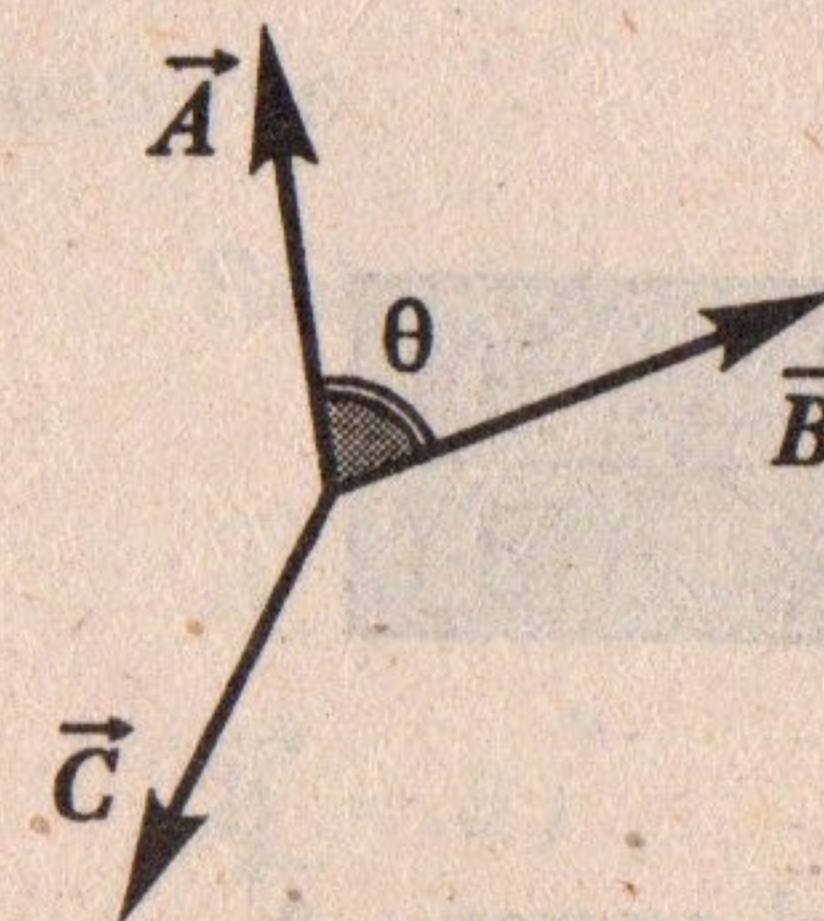
Clave: A

### PROBLEMA 44

En el sistema de vectores mostrado, hallar el ángulo " $\theta$ " si :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0} ; A = 7$$

$$B = 8 ; C = 13$$



A)  $90^\circ$

B)  $30^\circ$

C)  $60^\circ$

D)  $37^\circ$

E)  $53^\circ$

### RESOLUCIÓN

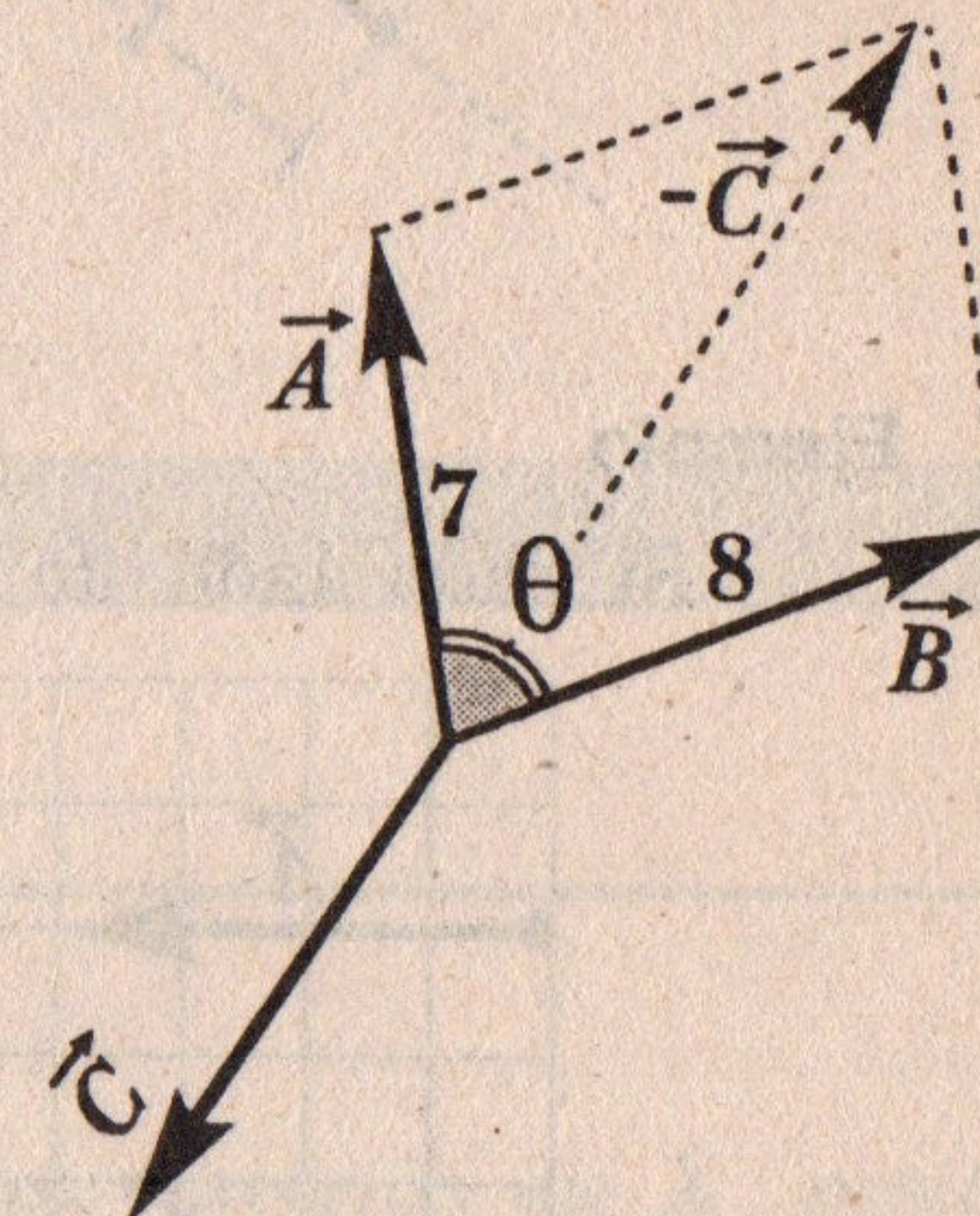
Se sabe :  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

$$\vec{R} = \vec{0}$$

En el gráfico, debe cumplir

$$\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$$

Es decir :



También :

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |-\vec{C}|$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = C$$

Por la regla del paralelogramo :

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2 \times AB \cos \theta} = C$$

$$\sqrt{7^2 + 8^2 + 2 \times 7 \times 8 \times \cos \theta} = 13$$

$$113 + 112 \cos \theta = 169$$

$$\cos \theta = 1/2$$

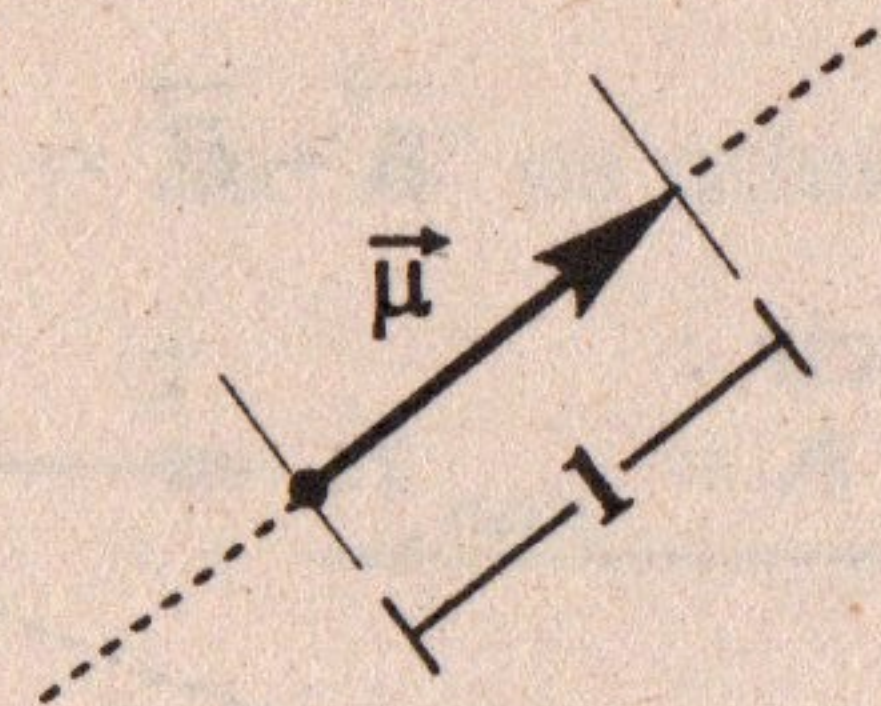
$$\therefore \theta = 60^\circ$$

Clave: C



# VECTOR UNITARIO ( $\vec{\mu}$ )

Es usado para indicar la dirección de un vector. Su módulo es la unidad.

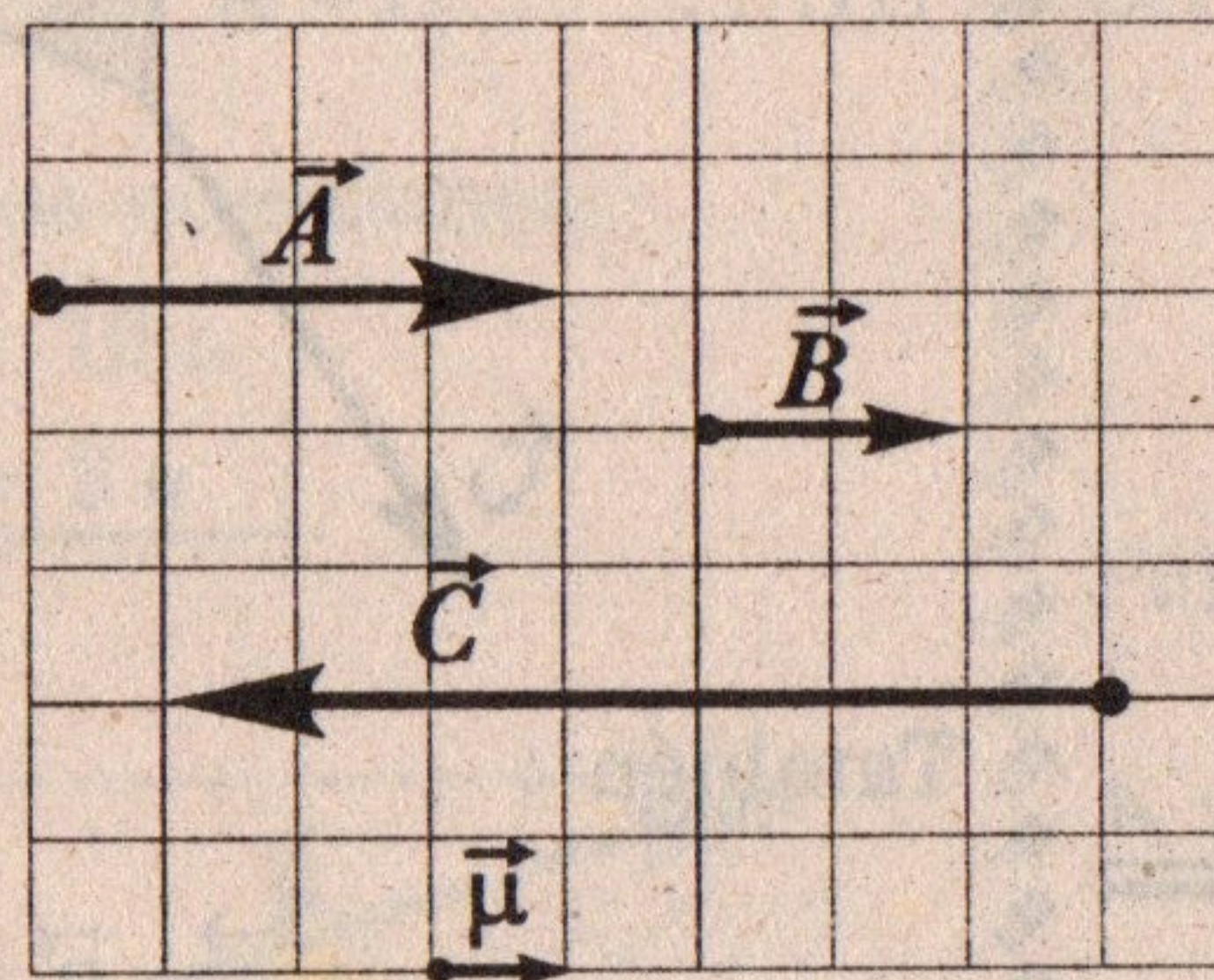


$\vec{\mu}$  : vector unitario

$$|\vec{\mu}| = 1$$

## Ejemplo

Si cada lado de la cuadrícula mide 1. Entonces :



$$\vec{A} = 4\vec{\mu}$$

$$\vec{B} = 2\vec{\mu}$$

$$\vec{C} = 7(-\vec{\mu})$$

$$\text{ó } \vec{C} = -7\vec{\mu}$$

Podemos notar :

$$\vec{A} = 4\vec{\mu}$$

└── Vector Unitario

└── Módulo de  $\vec{A}$

La Fórmula General será :

$$\vec{A} = |\vec{A}| \vec{\mu}_A$$

ó

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$\vec{\mu}_A$  : Vector Unitario paralelo al vector  $\vec{A}$

ó Vector Unitario de  $\vec{A}$ .

## PROPIEDAD IMPORTANTE

En el ejemplo anterior  $\vec{A} = 4\vec{\mu}$  ;  $\vec{B} = 2\vec{\mu}$

Notamos :  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen el mismo vector unitario y son paralelos.

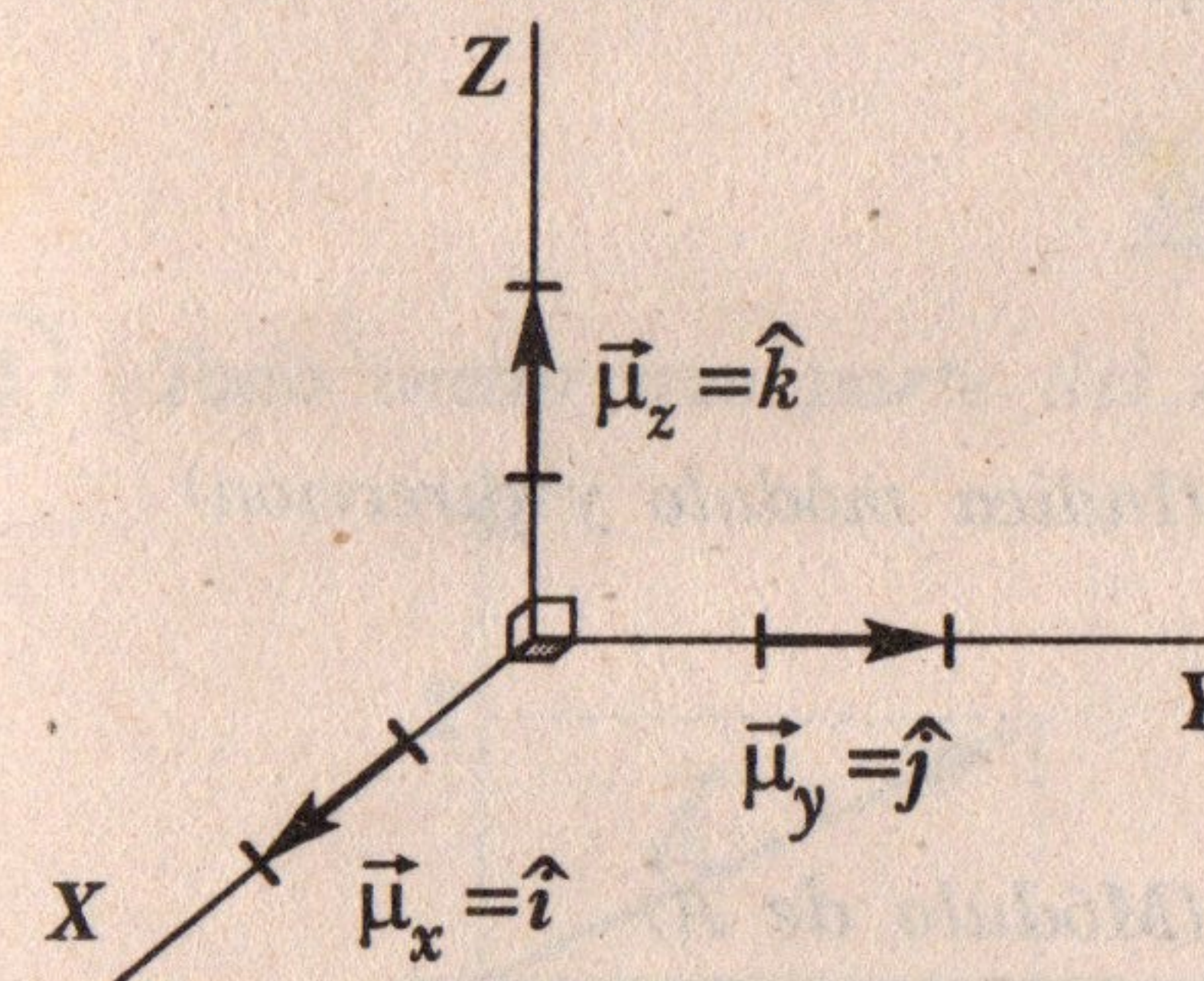
Es decir , Si :  $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{\mu}_A = \vec{\mu}_B$

Luego :

$$\frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{B}}{B}$$

## VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS

Indican la dirección de cada eje cartesiano



Nota:

$\hat{i}$  Indica dirección eje X positivo  
 $-\hat{i}$  Indica dirección eje X negativo

## Ejemplos

Escriba como función de vectores unitarios los siguientes vectores

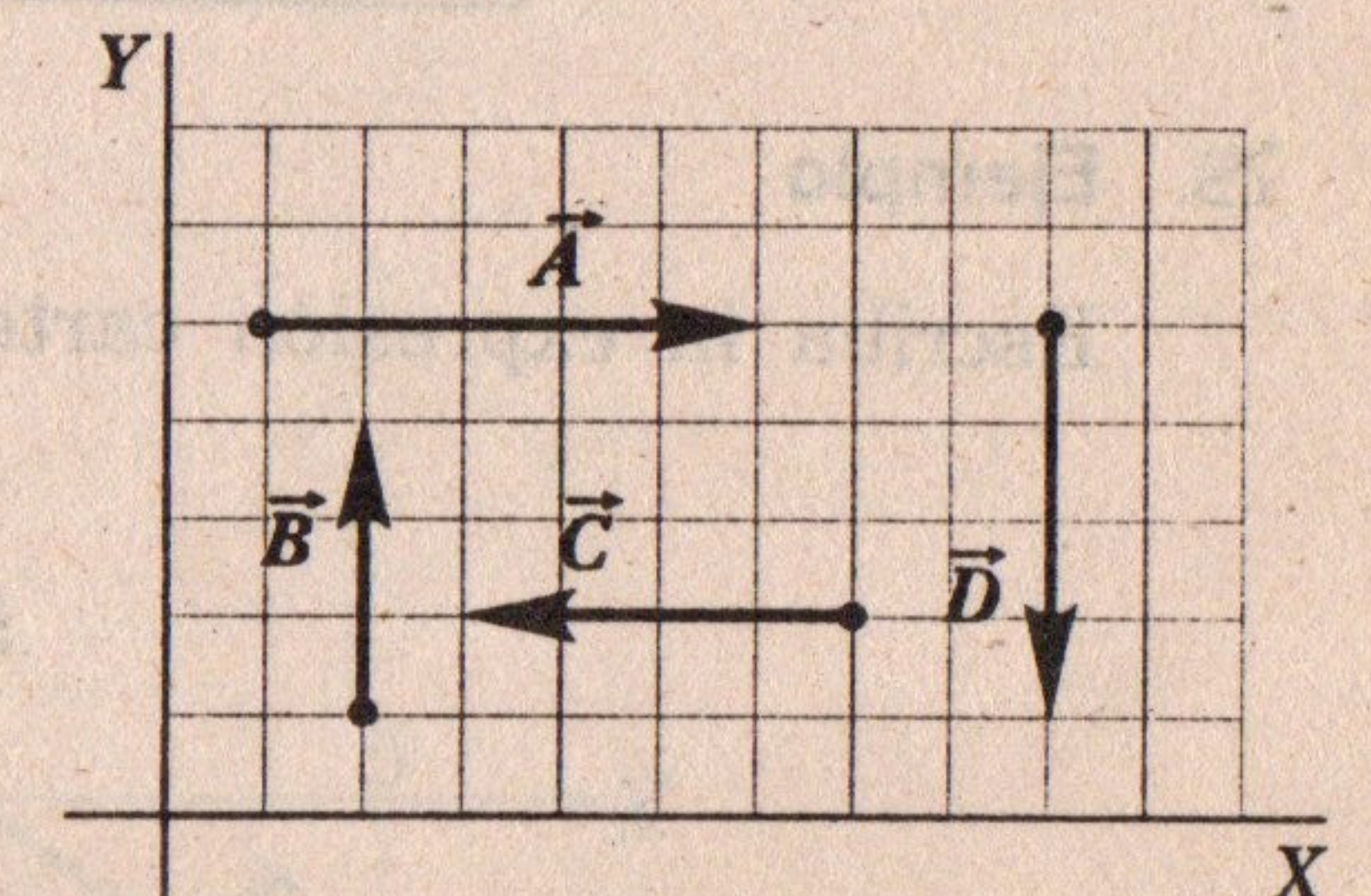
Solución

$$\vec{A} = 5\hat{i}$$

$$\vec{B} = 3\hat{j}$$

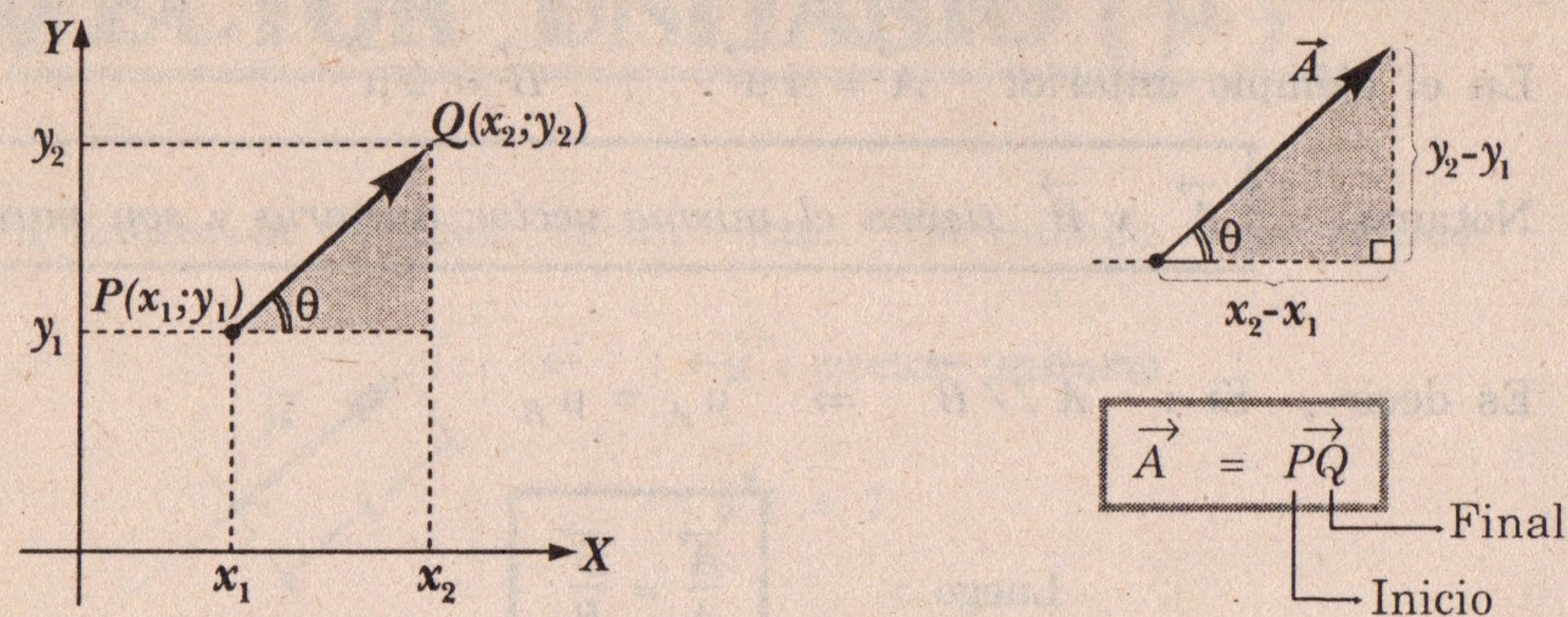
$$\vec{C} = -4\hat{i}$$

$$\vec{D} = -4\hat{j}$$





## REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE UN VECTOR



También :  $\vec{A}$  puede escribirse :

$$\vec{A} = \vec{PQ} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (\text{Expresión Cartesiana})$$

O por teoría de Vectores Unitarios :

$$\vec{A} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} \quad (\text{Indica módulo y dirección})$$

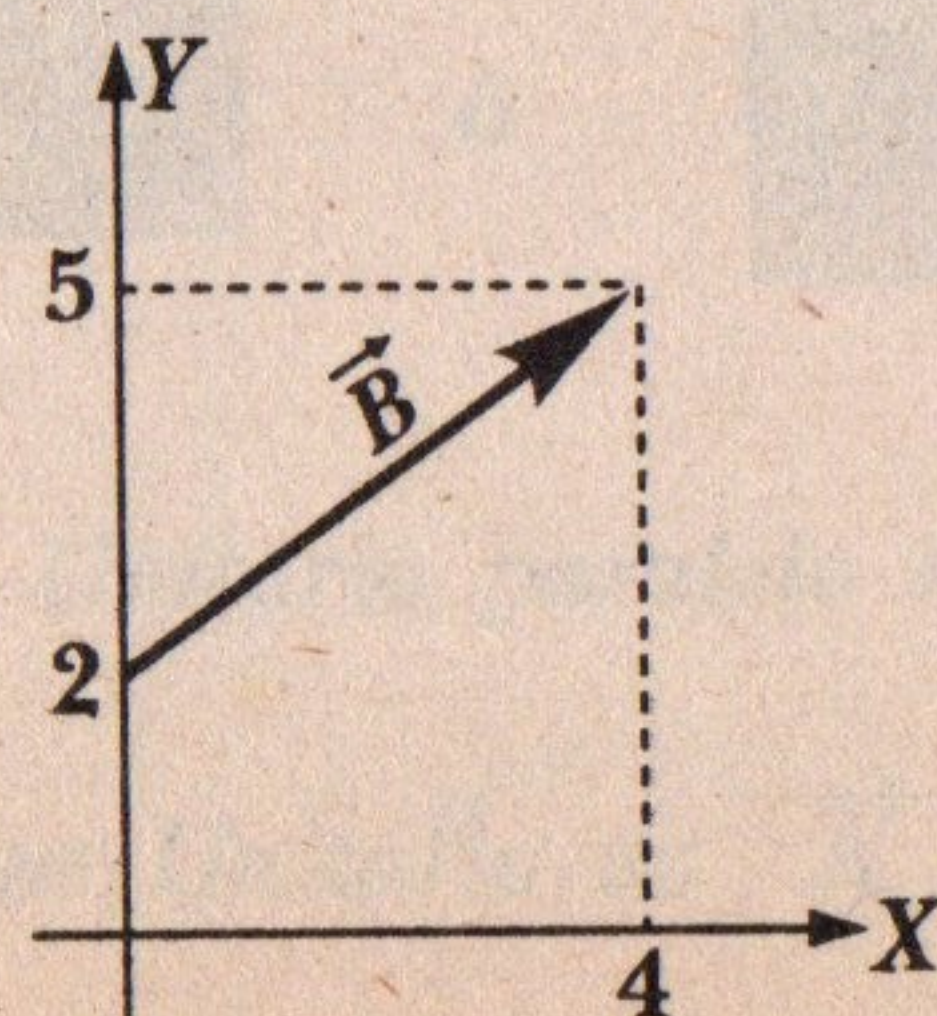
**Nota:**

$$A = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{Módulo de } \vec{A})$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Ubicamos dirección})$$

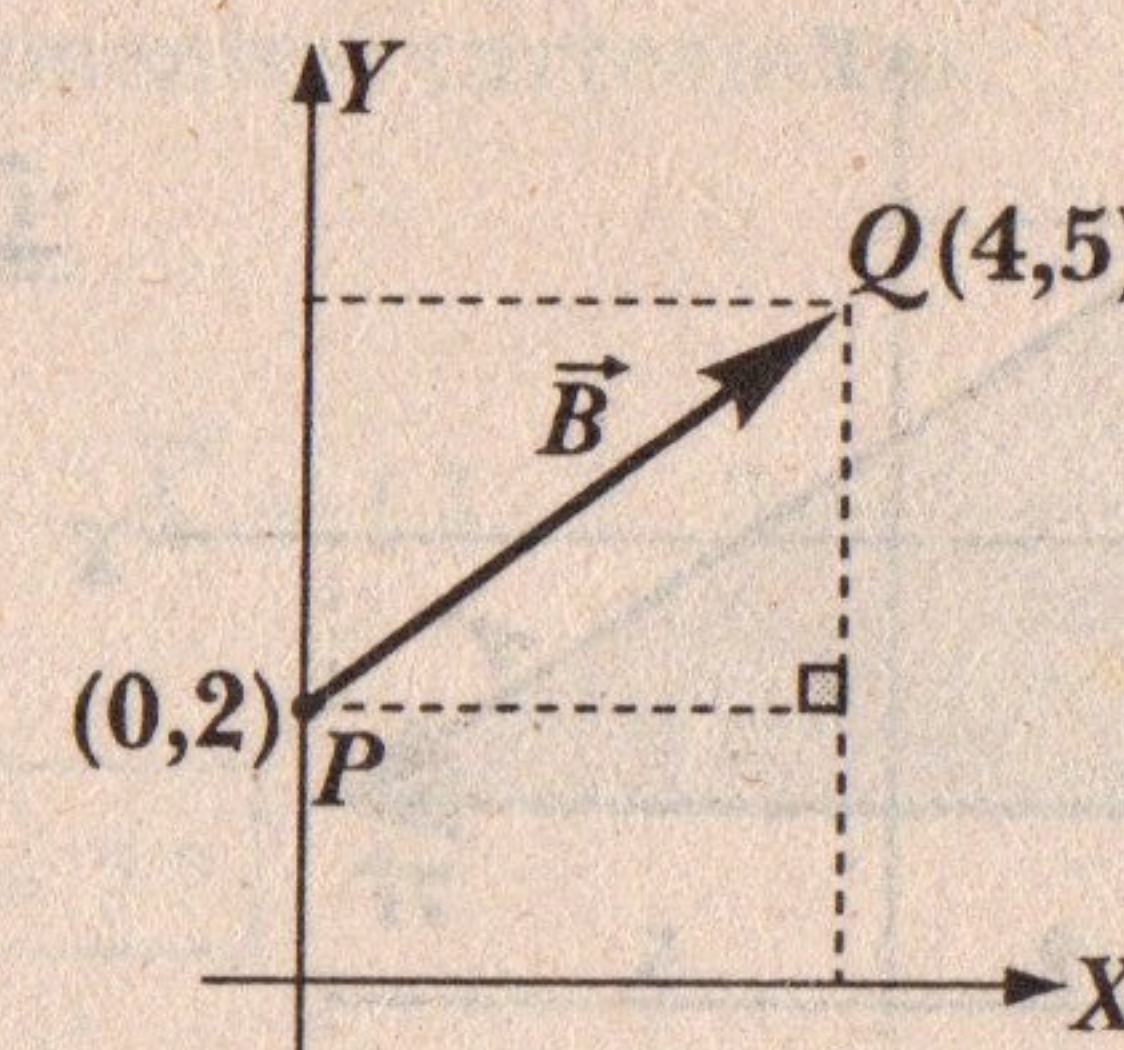
### Ejemplo

Escriba la expresión cartesiana del vector  $\vec{B}$ .



## Solución

Ubicamos las coordenadas



$$\vec{B} = \vec{PQ} = (4, 5) - (0, 2)$$

$$\vec{B} = (4, 3) \quad \text{ó}$$

$$\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

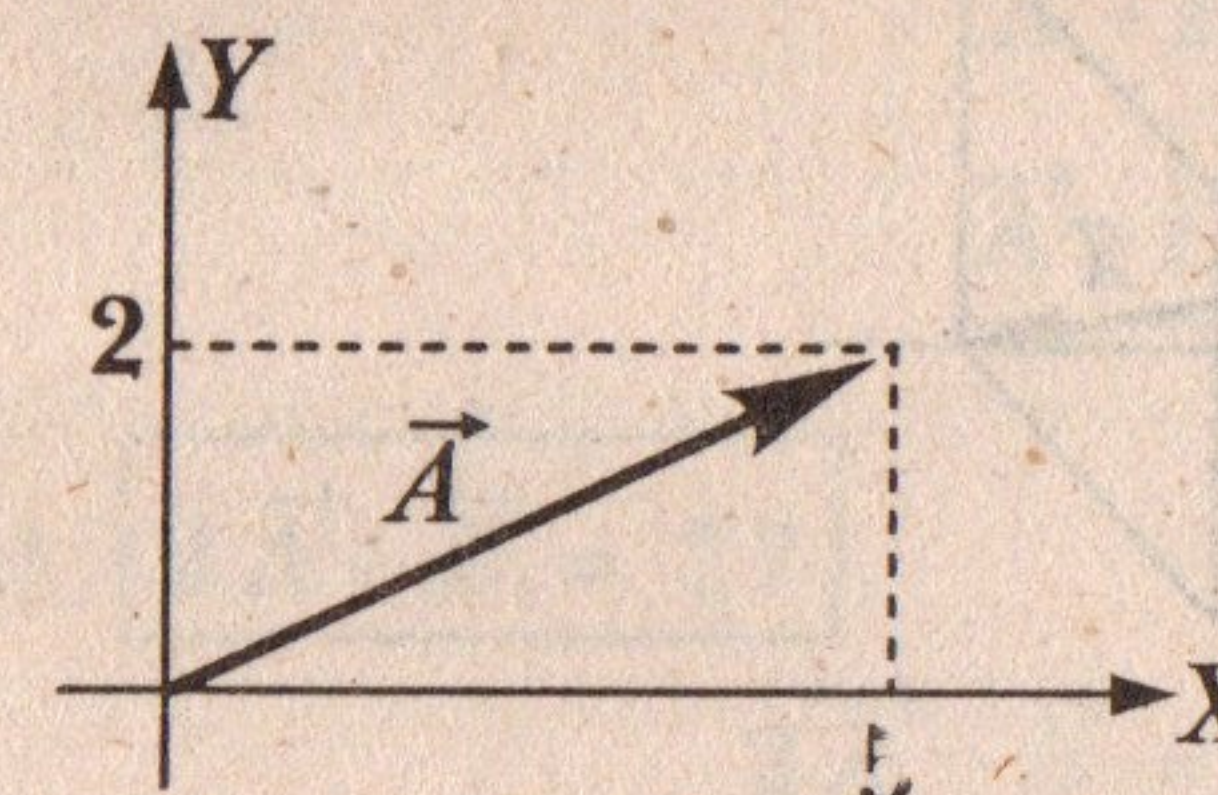
También :

$$(\text{Módulo}) \quad B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$(\text{Dirección}) \quad \text{tg } \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

### Observaciones

- ① Todo vector que parte del origen, se denota por su coordenada final.



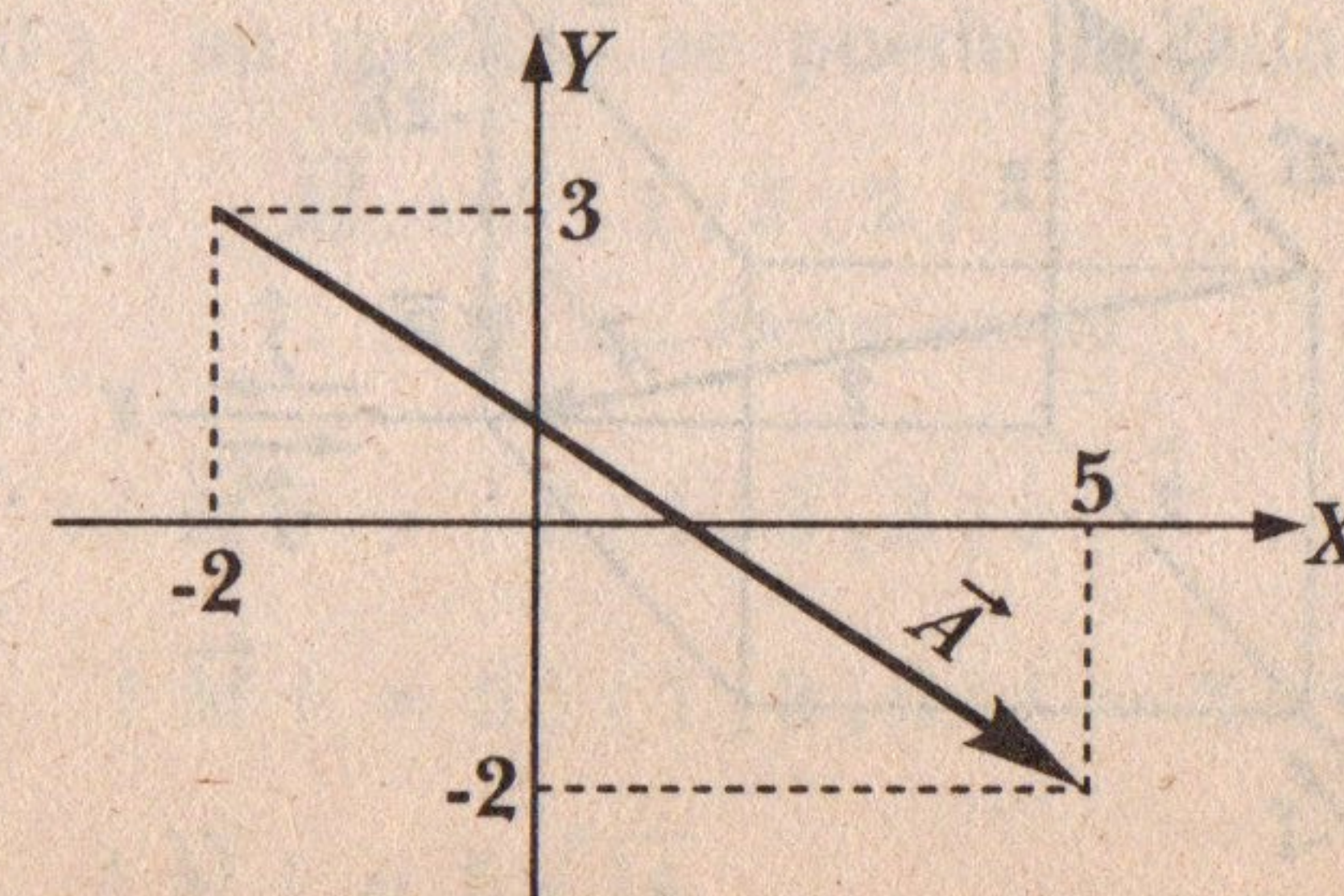
$$* \quad \vec{A} = (5, 2) \quad \text{ó}$$

$$* \quad \vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$

- ② Para hallar la forma cartesiana de un vector no necesariamente se hace por el método enseñado; su ingenio lo ayudará a resolver de "n" maneras.

### Ejemplo 1

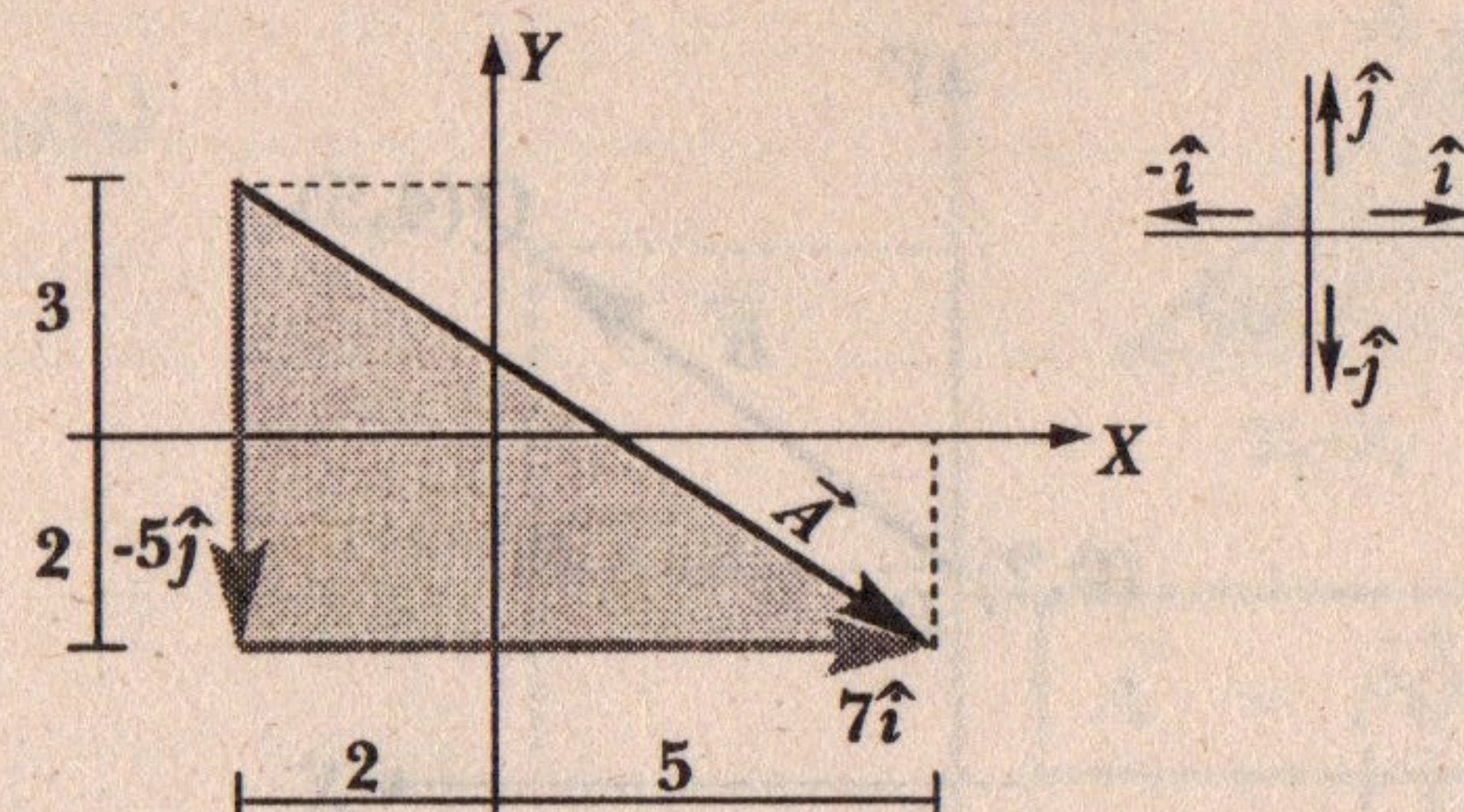
Hallar  $\vec{A}$  :





**Solución**

Graficamos al vector como suma de 2 vectores paralelos a los ejes cartesianos.



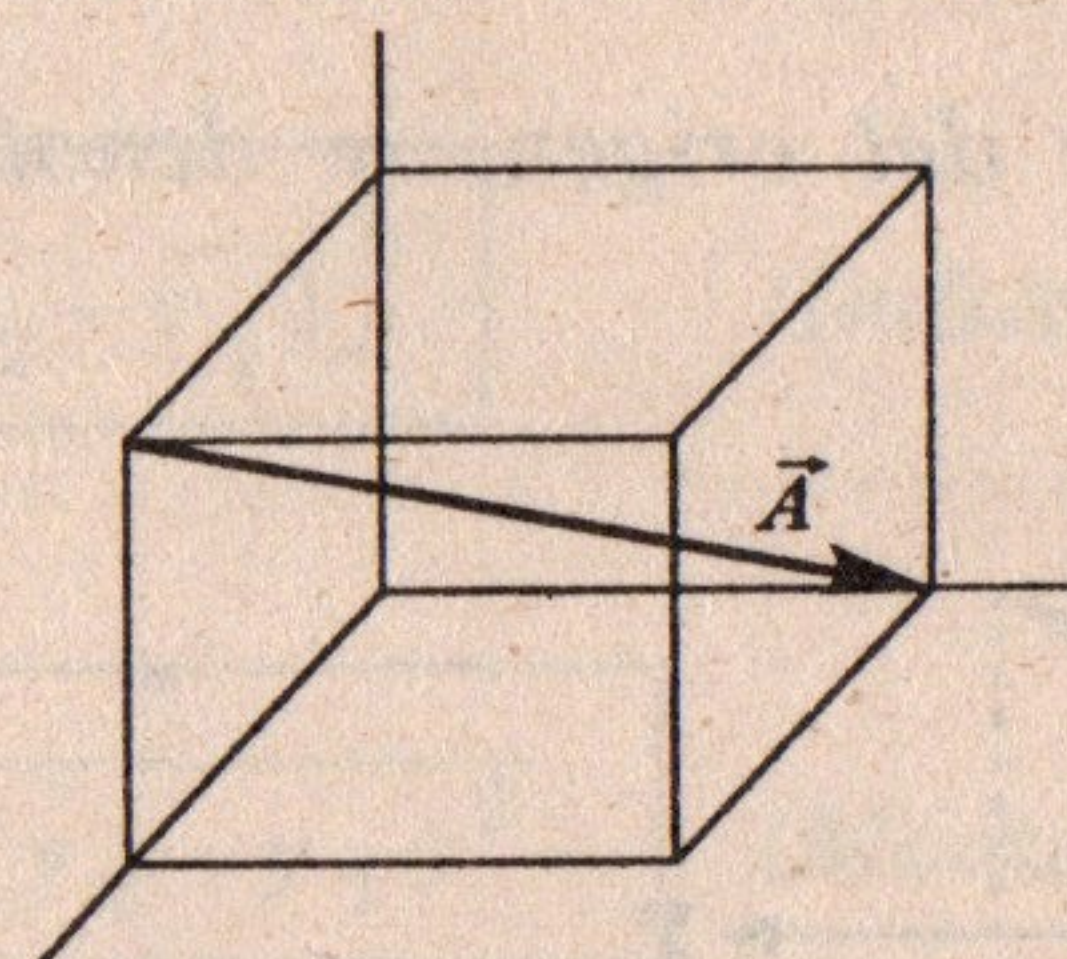
En el  $\triangle$  sombreado obtenemos :

$$\vec{A} = -5\hat{j} + 7\hat{i}$$

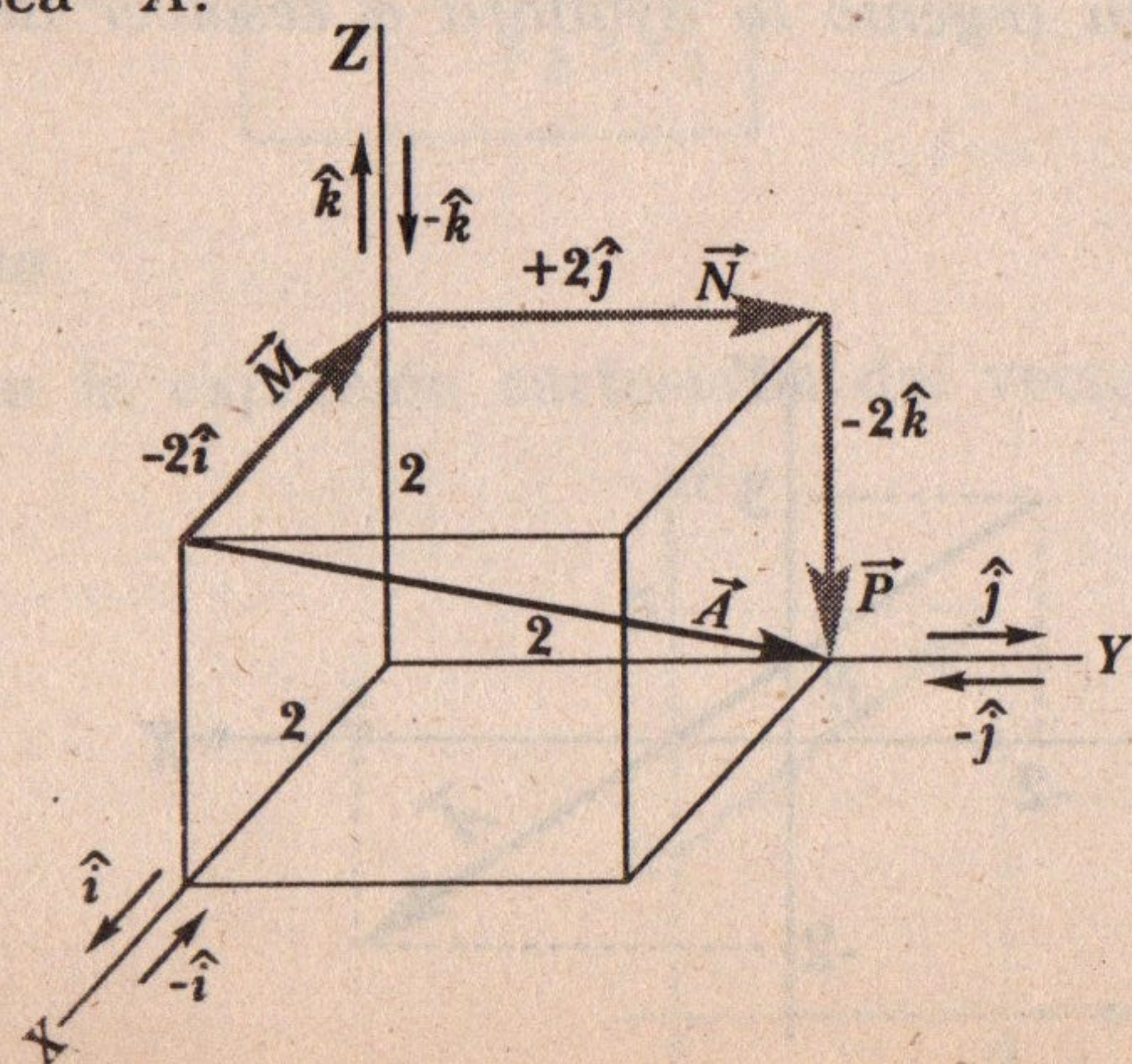
$$\boxed{\vec{A} = 7\hat{i} - 5\hat{j}} \quad \text{Rpta.}$$

**Ejemplo 2**

Hallar  $\vec{A}$ . La figura es un cubo de lado 2.

**Solución**

Ubicamos vectores uno a continuación del otro y el vector que cierra sea  $\vec{A}$ .



$$\vec{A} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P}$$

$$\vec{A} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \boxed{\vec{A} = (-2, 2, -2)} \quad \text{Rpta.}$$

**OPERACIONES VECTORIALES**

Cuando se suma o resta 2 vectores escritos en forma cartesiana; se proceden sumando o restando sus componentes cartesianas.

**Ejemplo :**

$$\text{Sea : } \vec{A} = (1, 2, 3) \quad , \quad \vec{B} = (4, -5, 6)$$

Hallar :

$$\text{a) } \boxed{\vec{A} + \vec{B} = ??}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (1+4, 2-5, 3+6)$$

$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = (5, -3, 9)}$$

También :

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 9^2}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{115}$$

$$\text{b) } \boxed{\vec{A} - \vec{B} = ??}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (1-4, 2-(-5), 3-6)$$

$$\boxed{\vec{A} - \vec{B} = (-3, 7, -3)}$$

$$\text{c) } \boxed{2\vec{A} - \vec{B} = ??}$$

$$2\vec{A} - \vec{B} = 2(1, 2, 3) - (4, -5, 6)$$

$$2\vec{A} - \vec{B} = (2, 4, 6) - (4, -5, 6)$$

$$\boxed{2\vec{A} - \vec{B} = (-2, 9, 0)} \quad \text{ó} \quad \boxed{2\vec{A} - \vec{B} = -2\hat{i} + 9\hat{j}}$$

**Nota importante:**

Si  $\vec{M} = (5, 15, 10)$  su módulo se puede calcular también como :

$$\vec{M} = 5(1, 3, 2)$$

Factor común

$$|\vec{M}| = |5(1, 3, 2)|$$

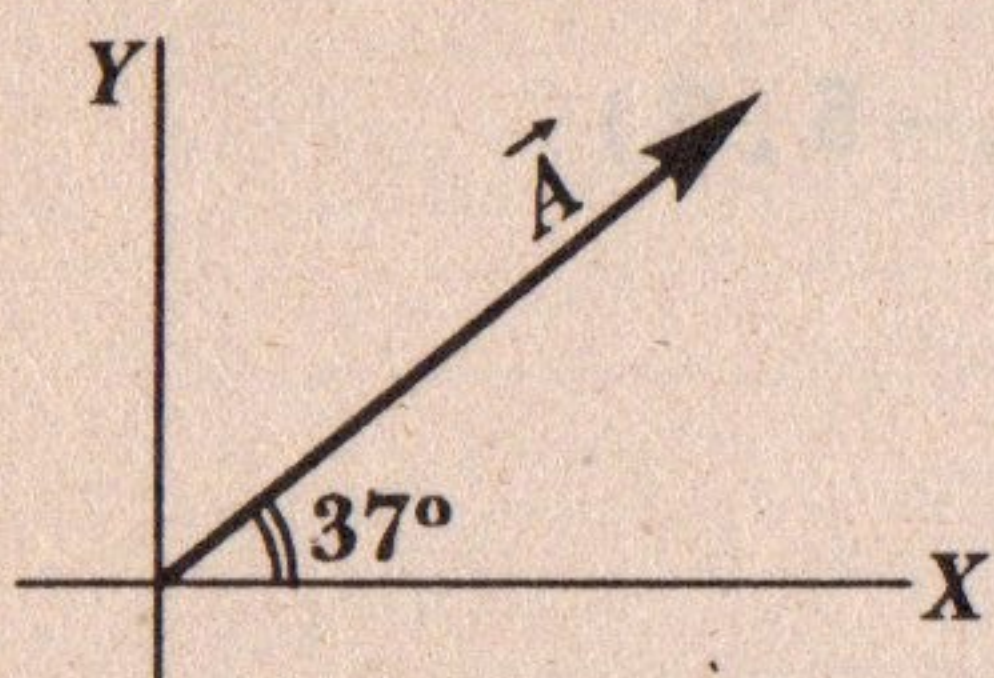
$$|\vec{M}| = 5|(1, 3, 2)| = 5 \times \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$\therefore |\vec{M}| = 5\sqrt{14}$$



**PROBLEMA 45**

La magnitud del vector  $\vec{A}$  es de 5 unidades; expresar  $\vec{A}$  en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ .

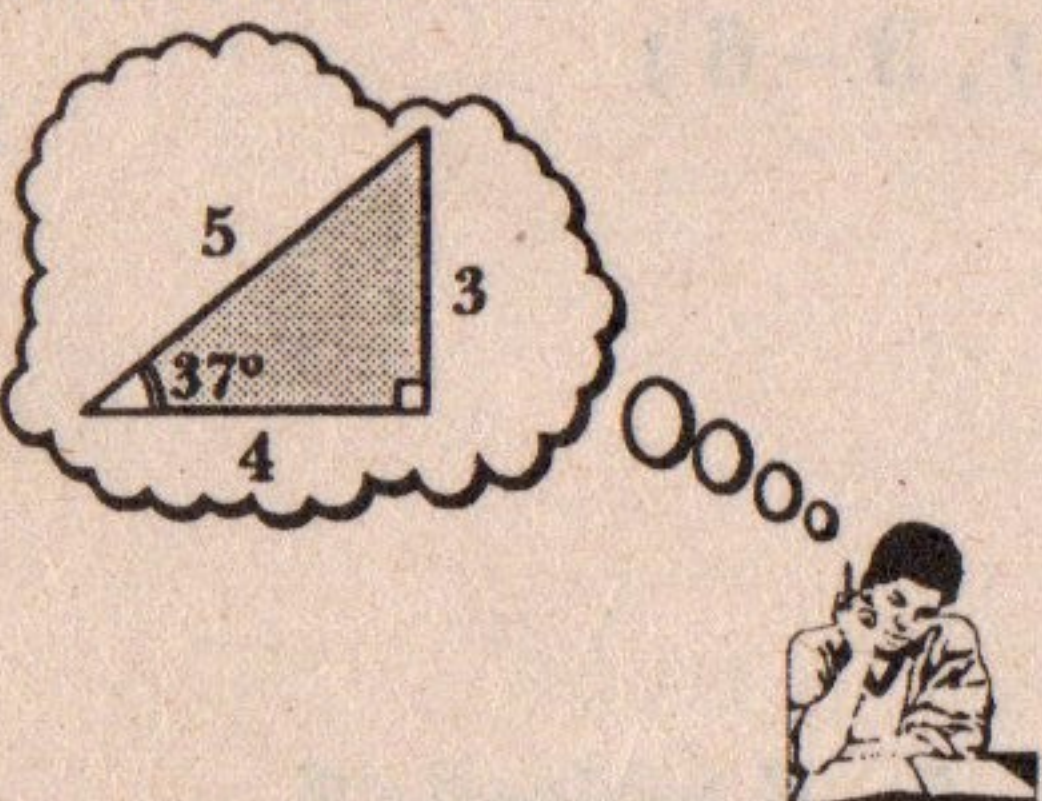


- A)  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$       B)  $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$   
 C)  $4\hat{i} + 5\hat{j}$       D)  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$   
 E)  $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

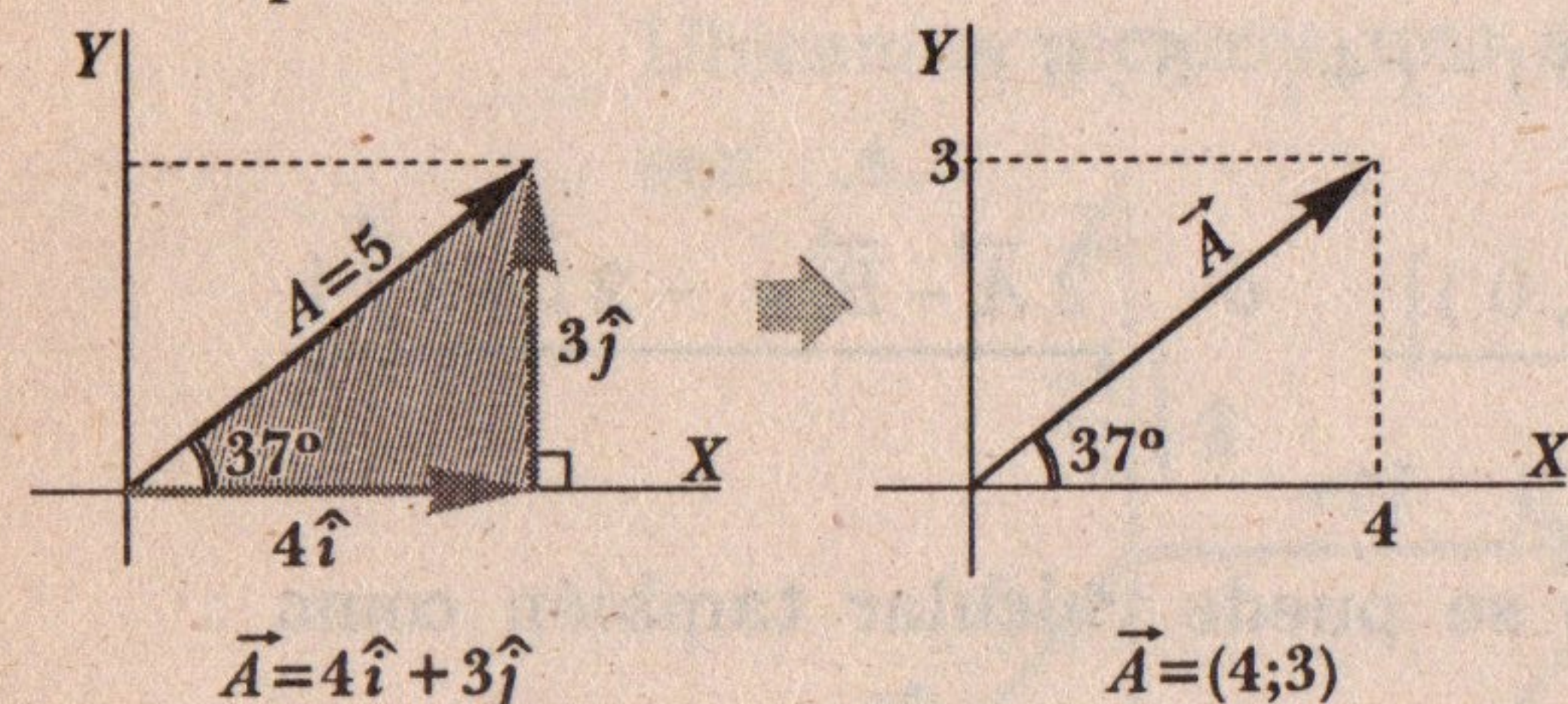
**RESOLUCIÓN**

Cuando descomponemos los vectores en los ejes cartesianos, implícitamente lo estamos expresando en función de sus vectores unitarios.

Recordar :



En el problema.



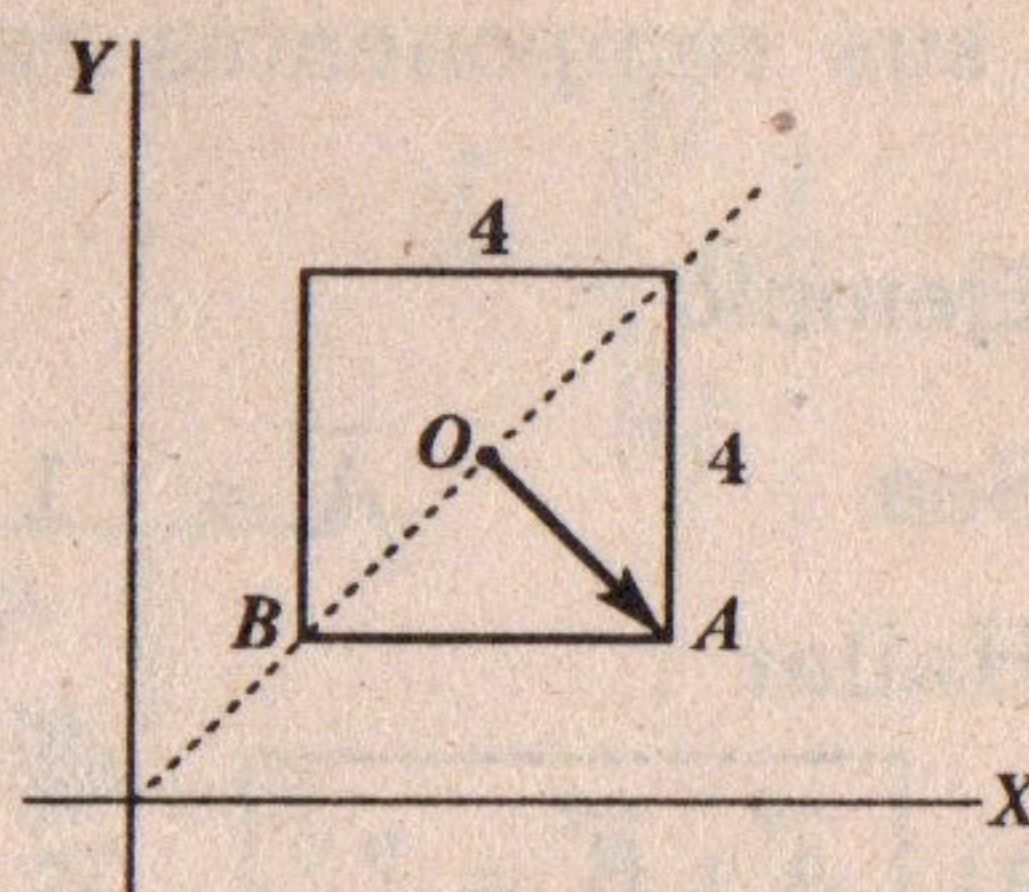
$$\therefore \vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

Clave: E

**PROBLEMA 46** (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Se muestra el cuadrado de centro O. Si

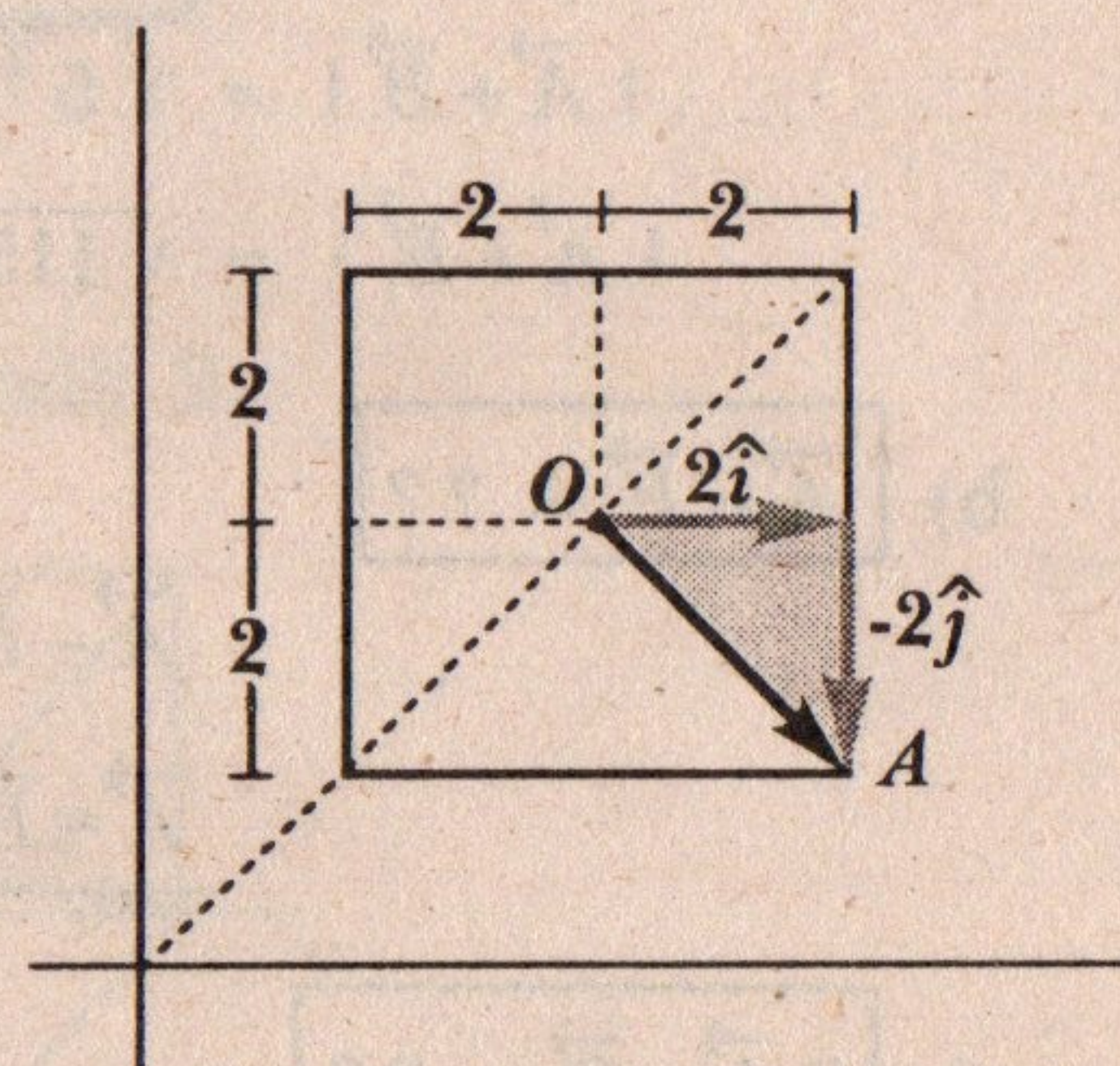
el lado BA es paralelo al eje X, hallar el vector  $\vec{OA}$ .



- A)  $2(\hat{i} - \hat{j})$       B)  $\hat{i} - \hat{j}$       C)  $2(\hat{j} - \hat{i})$   
 D)  $2\hat{i} - \hat{j}$       E)  $2\hat{j} - 2\hat{i}$

**RESOLUCIÓN**

Graficando :



\*  $\vec{OA}$  : Es descompuesto como vectores paralelos a los ejes cartesianos

$$\vec{OA} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\therefore \vec{OA} = 2(\hat{i} - \hat{j})$$

Clave: A

**PROBLEMA 47**

Sean los vectores :

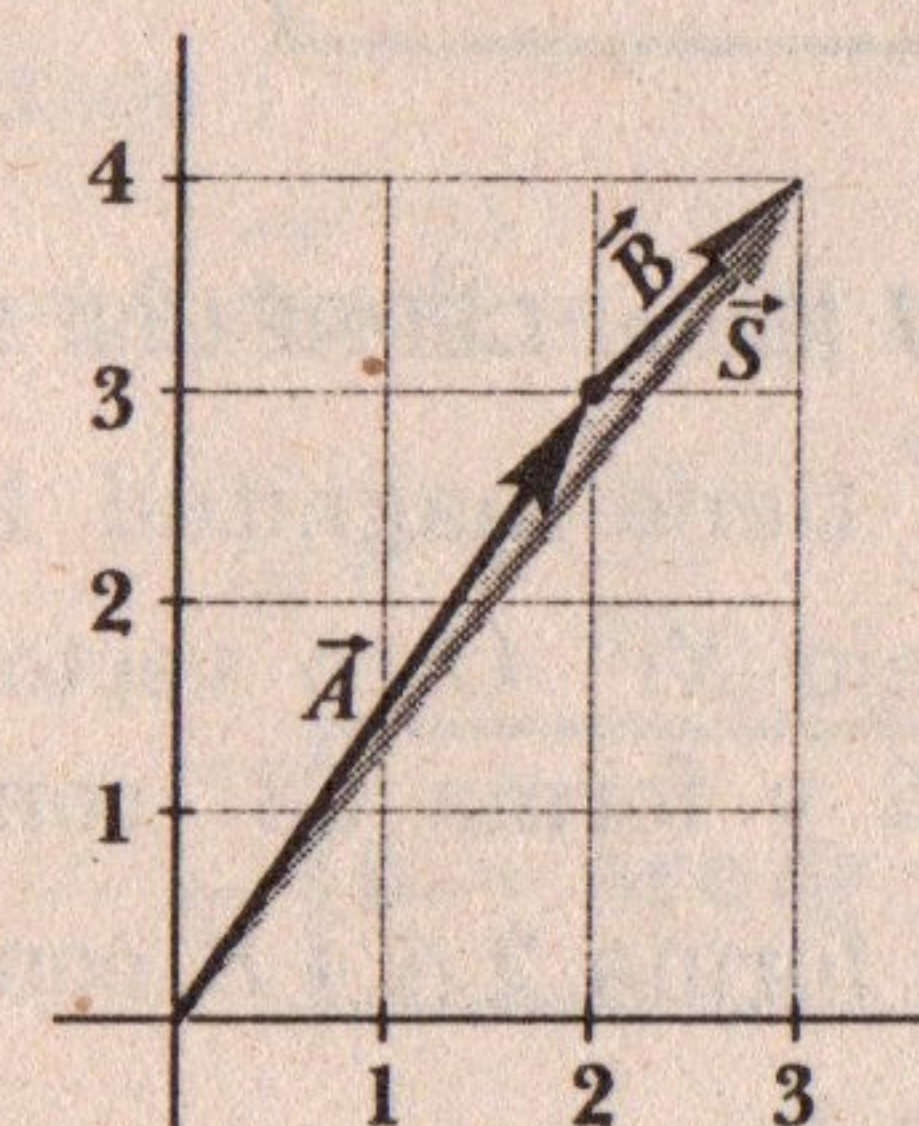
$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} ; \vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$$

Determinar la magnitud del vector suma.

- A)  $\sqrt{3}$       B)  $2\sqrt{5}$       C) 10  
 D)  $\sqrt{5}$       E) 5

**RESOLUCIÓN**

Lo haremos gráficamente guiándonos por las cuadrículas.



$$* \vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$

\* Observamos las componentes de  $\vec{S}$ .

$$* \text{Luego : } \vec{S} = (3, 4)$$

$$S = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\therefore S = 5$$

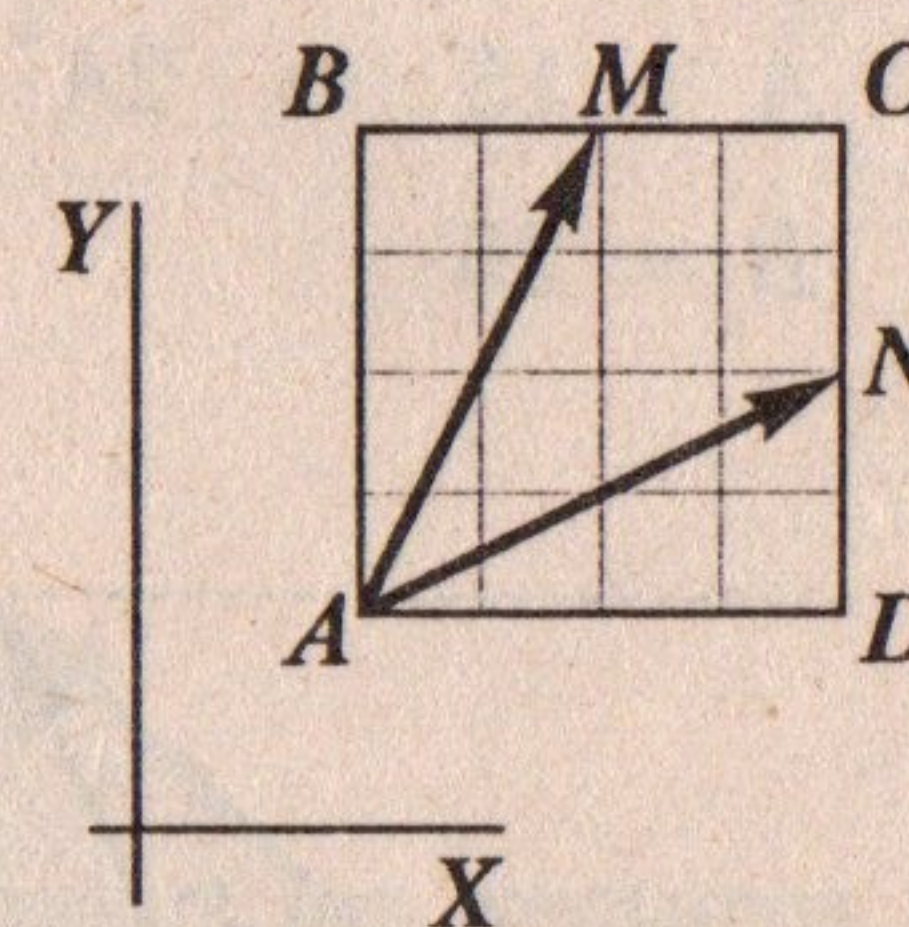
Clave: E

**Nota:**

Otro método de solución. Ver prob. N°49

**PROBLEMA 48** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Calcular la resultante de los 2 vectores mostrados, sabiendo que ABCD es un cuadrado de 4m de lado y "M" y "N" son puntos medios.

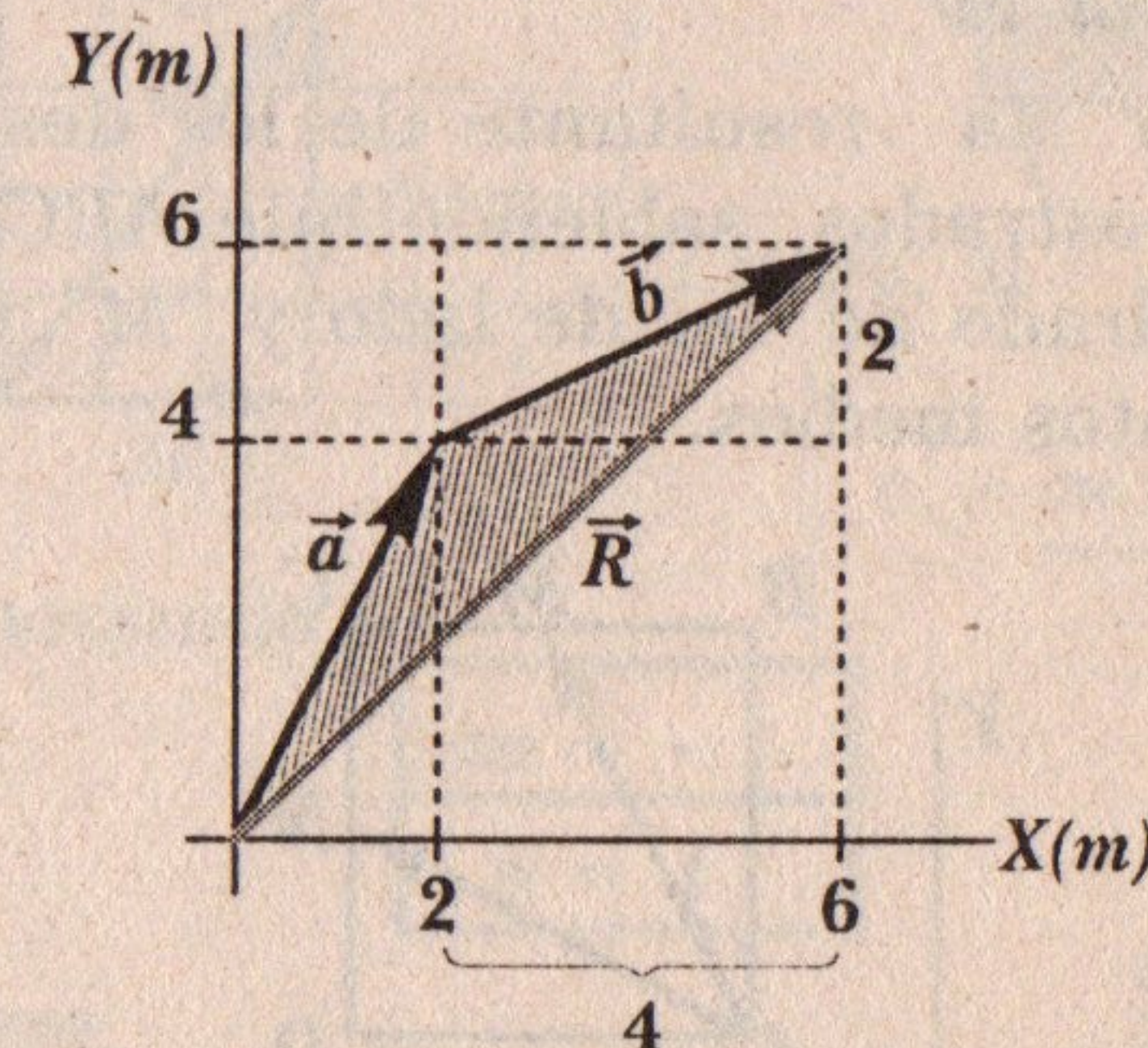


- A)  $(2\hat{i} + 2\hat{j})m$       B)  $(3\hat{i} + 3\hat{j})m$   
 C)  $(\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j})m$       D)  $6(\hat{i} + \hat{j})m$   
 E)  $6(\hat{j} - \hat{i})m$

**RESOLUCIÓN**

Aplicaremos el método gráfico, ubicando los vectores uno a continuación del otro; y aprovechando las cuadrículas.

\* Llamemos :  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  a los vectores  $\vec{AM}$  y  $\vec{AN}$  respectivamente.



En la figura :

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{R} = (6, 4)m$$

O también :

$$\vec{R} = (6\hat{i} + 4\hat{j})m$$

Clave: D

**Nota:**

Otra forma de resolver. Ver prob. N°50

**PROBLEMA 49**

Sean los vectores :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} ; \vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$$

Determinar la magnitud del vector suma.

- A)  $\sqrt{3}$       B)  $2\sqrt{5}$       C) 10  
 D)  $\sqrt{5}$       E) 5

**RESOLUCIÓN**

Si

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} \\ \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} \end{array} \right\} (+)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$



Su módulo será :

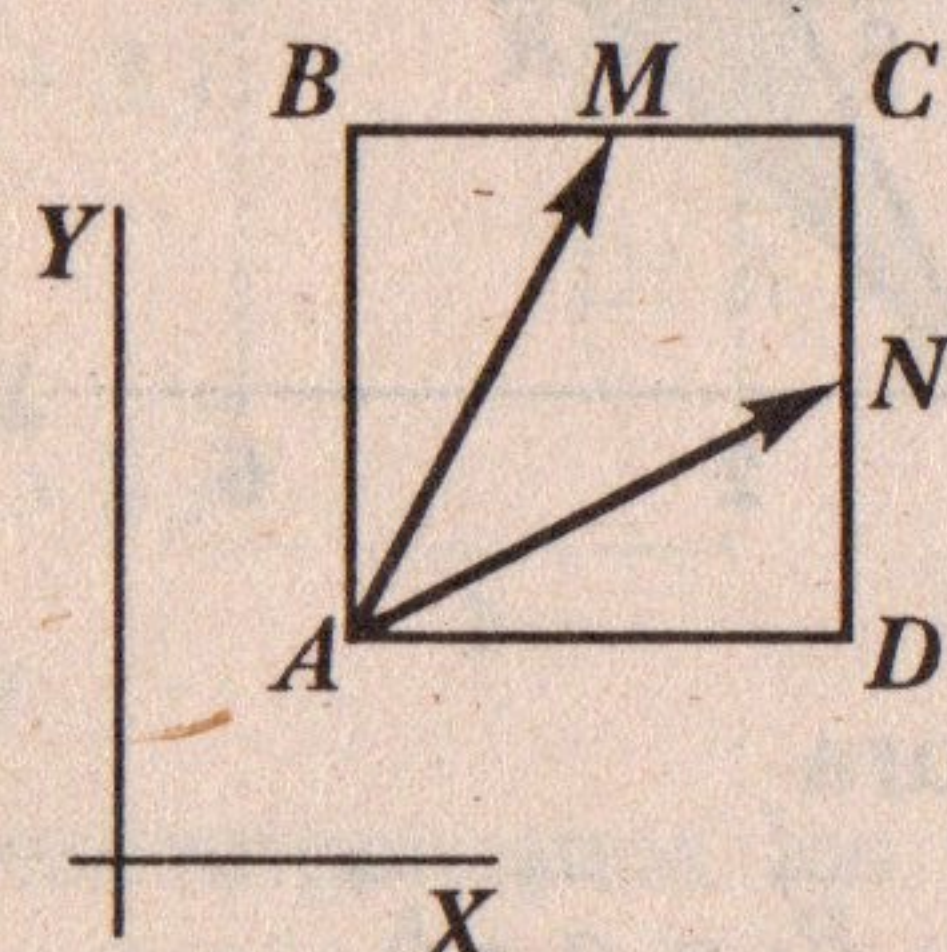
$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = 5$$

Clave: E

### PROBLEMA 50

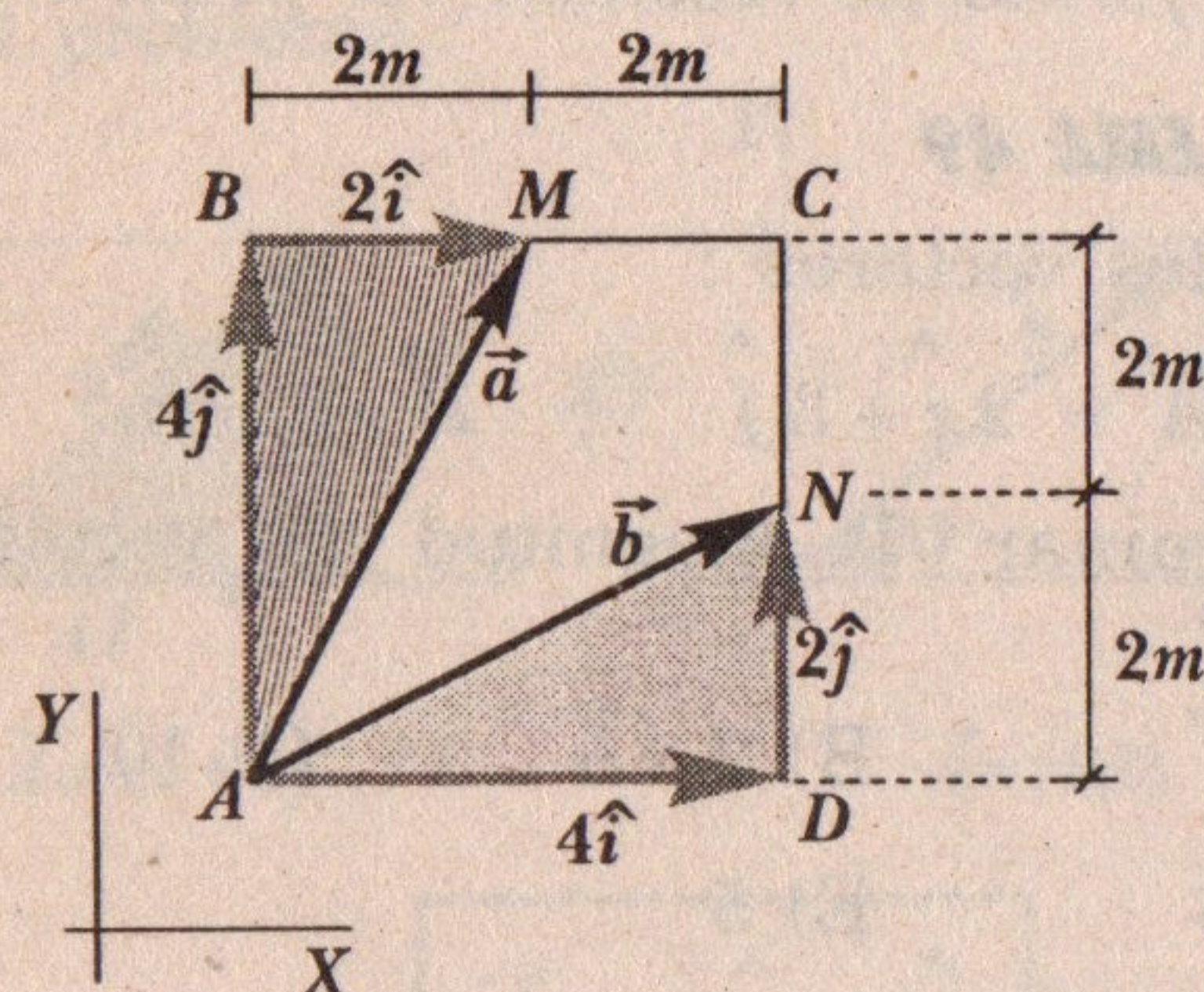
Calcular la resultante de los dos vectores mostrados, sabiendo que ABCD es un cuadrado de 4m de lado y "M" y "N" son puntos medios.



- A)  $2\hat{i} + 2\hat{j}$     B)  $3\hat{i} + 3\hat{j}$     C)  $\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j}$   
 D)  $6(1, 1)$     E)  $6(\hat{j} - \hat{i})$

### RESOLUCIÓN

Los vectores pueden ser expresados como suma de vectores cartesianos.



Luego :

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 4\hat{j} + 2\hat{i} \\ \vec{B} &= 4\hat{i} + 2\hat{j} \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = 6\hat{i} + 6\hat{j}$$

$$\therefore \vec{R} = 6(\hat{i} + \hat{j})$$

Clave: D

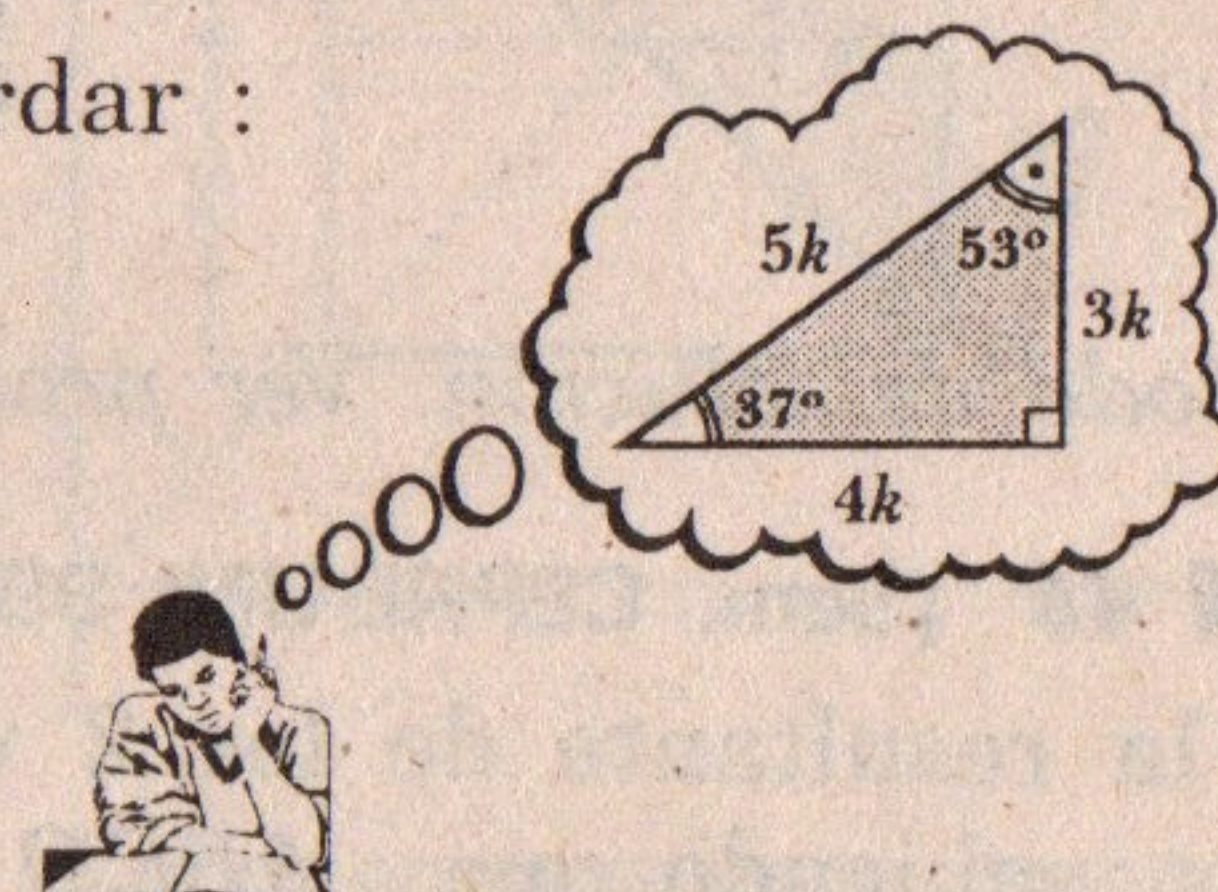
### PROBLEMA 51 (Sem. CEPRE-UNI 98-II)

Un vector  $\vec{A}$  tiene magnitud 15 y forma  $37^\circ$  con el eje X. Otro vector  $\vec{B}$  tiene magnitud 25 y forma  $53^\circ$  con el eje X. ¿Qué ángulo forma  $2\vec{A} + \vec{B}$  con el eje X.

- A)  $\arctg\left(\frac{39}{38}\right)$     B)  $\arctg\left(\frac{38}{39}\right)$   
 C)  $\arctg\left(\frac{25}{30}\right)$     D)  $\arctg\left(\frac{29}{39}\right)$   
 E)  $90^\circ$

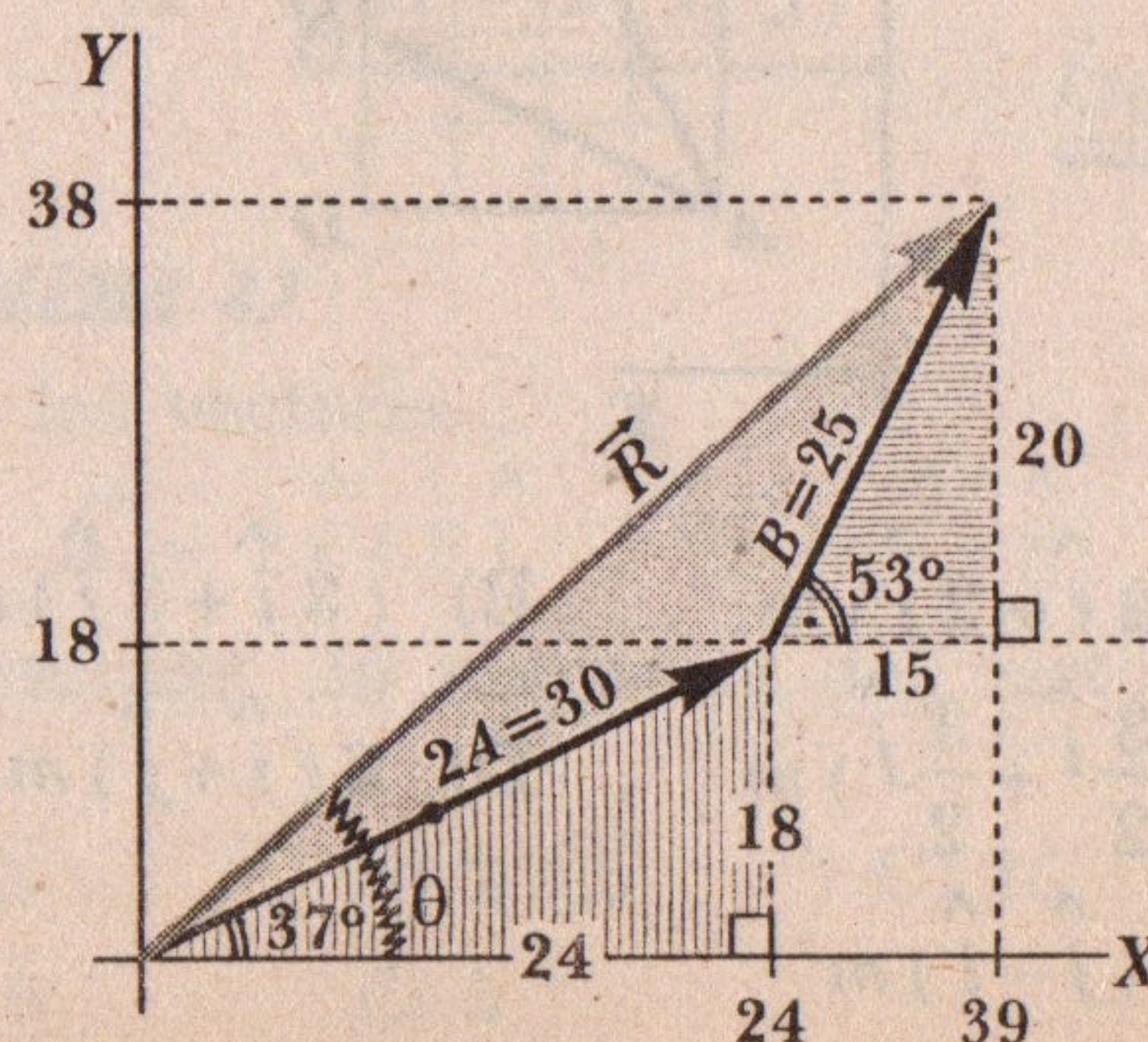
### RESOLUCIÓN

- \* Lo haremos por el método gráfico.  
 \* Recordar :



- \* Ubicamos los vectores uno a continuación del otro.

- \* Dato : \*  $A = 15 \Rightarrow 2A = 30$   
 \*  $B = 25$



- \* Las componentes han sido fácilmente halladas a partir de los triángulos notables.

Observamos :

$$\vec{R} = 2\vec{A} + \vec{B} = (39, 38)$$

$$\text{Luego : } \operatorname{tg} \theta = \frac{38}{39}$$

$$\therefore \theta = \arctg \frac{38}{39}$$

Clave: B

Nota:

Otro método de solución. Ver prob. N°53

### PROBLEMA 52 (Sem. CEPRE-UNI 98-II)

La resultante de los vectores :

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} ; \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j}$$

tiene un módulo igual a 10 y es paralela al eje Y de un sistema de coordenadas cartesianas. Hallar los valores de m y n.

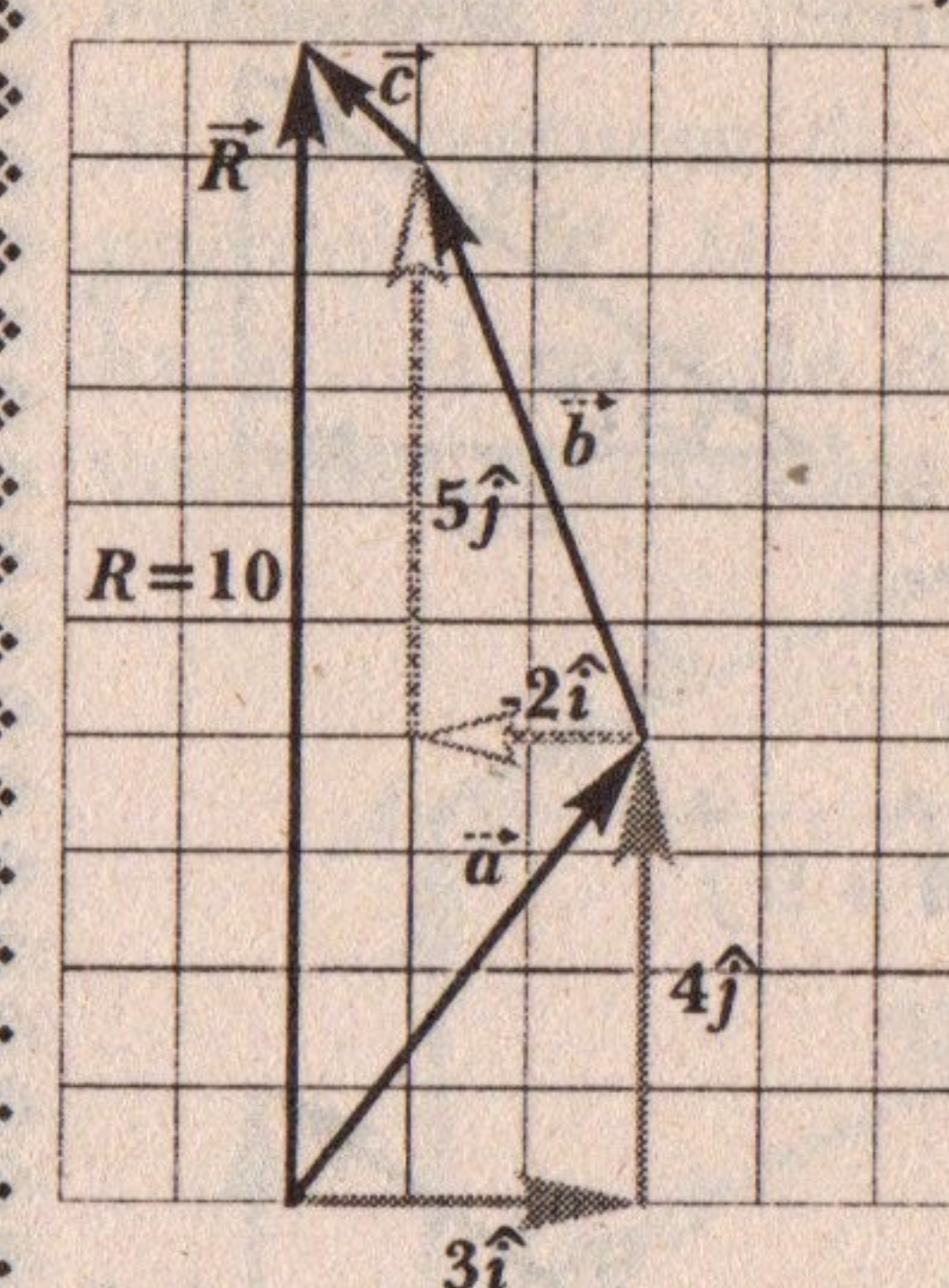
- A)  $m = -1$     B)  $m = 1$   
        $n = 1$          $n = -1$   
 C)  $m = -1$     D)  $m = 2$   
        $n = -1$          $n = -1$   
 E)  $m = 1$   
        $n = 1$

### RESOLUCIÓN

- \* Graficamos los vectores uno a continuación del otro. Guiándonos por cuadrículas.

- \* La resultante es vertical de 10 unidades.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



- \* Observamos que para completar el polígono ;

$$\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j}$$

Luego; si :

$$\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j}$$

Reconociendo :

$$\begin{aligned} m &= -1 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

Clave: A

Nota:

1. Como en el problema no especifica hacia donde está dirigido la resultante, y solamente indica el módulo ( $R = 10$ ) ; existe otra respuesta. ¡Consíguelo!

2. Otro método de solución ver prob. N° 54

### PROBLEMA 53

Un vector  $\vec{A}$  tiene magnitud 15 y forma  $37^\circ$  con el eje X. Otro vector  $\vec{B}$  tiene magnitud 25 y forma  $53^\circ$  con el eje X.

¿Qué ángulo forma  $2\vec{A} + \vec{B}$  con el eje X?

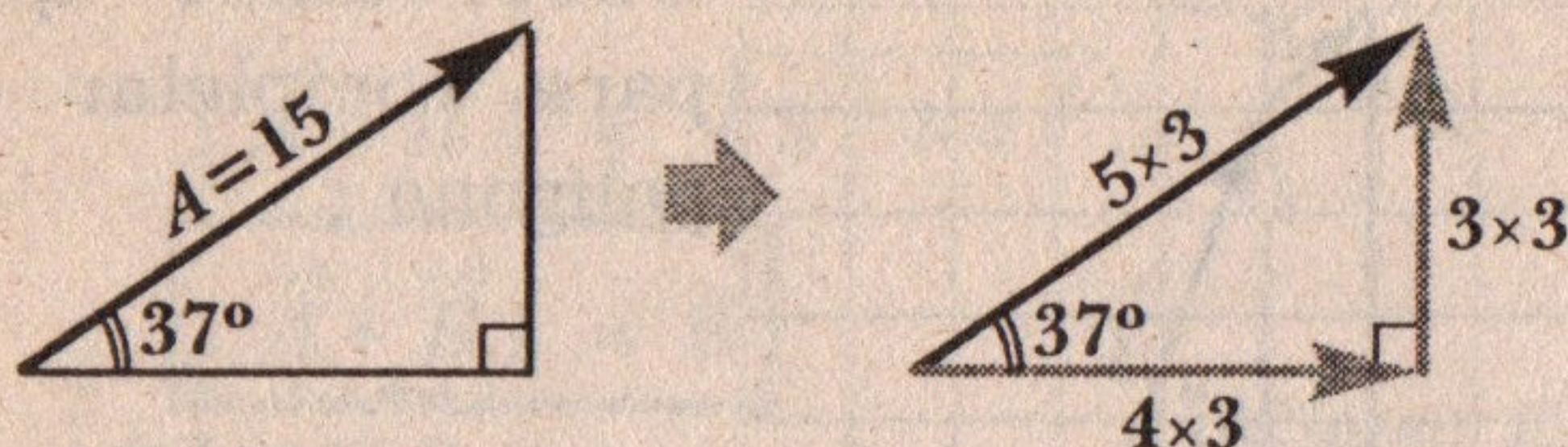
- A)  $\arctg\left(\frac{39}{38}\right)$     B)  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{38}{39}\right)$   
 C)  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{25}{30}\right)$     D)  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{29}{39}\right)$   
 E)  $90^\circ$

### RESOLUCIÓN

Graficamos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y hallamos sus componentes cartesianas.

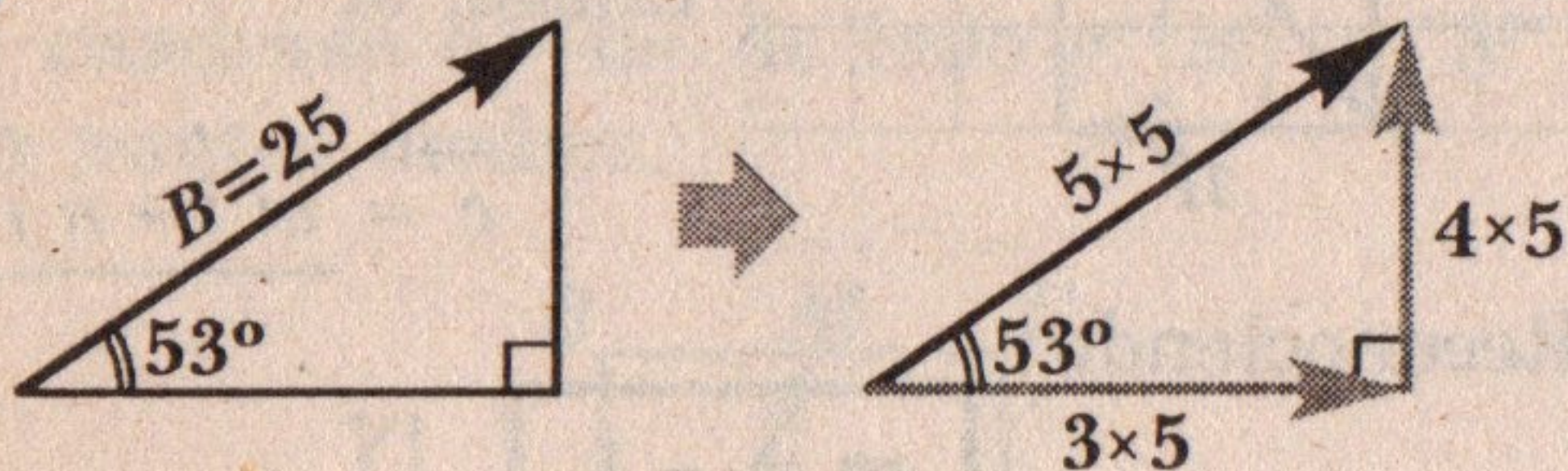


a)



$$\vec{A} = 12\hat{i} + 9\hat{j}$$

b)



$$\vec{B} = 15\hat{i} + 20\hat{j}$$

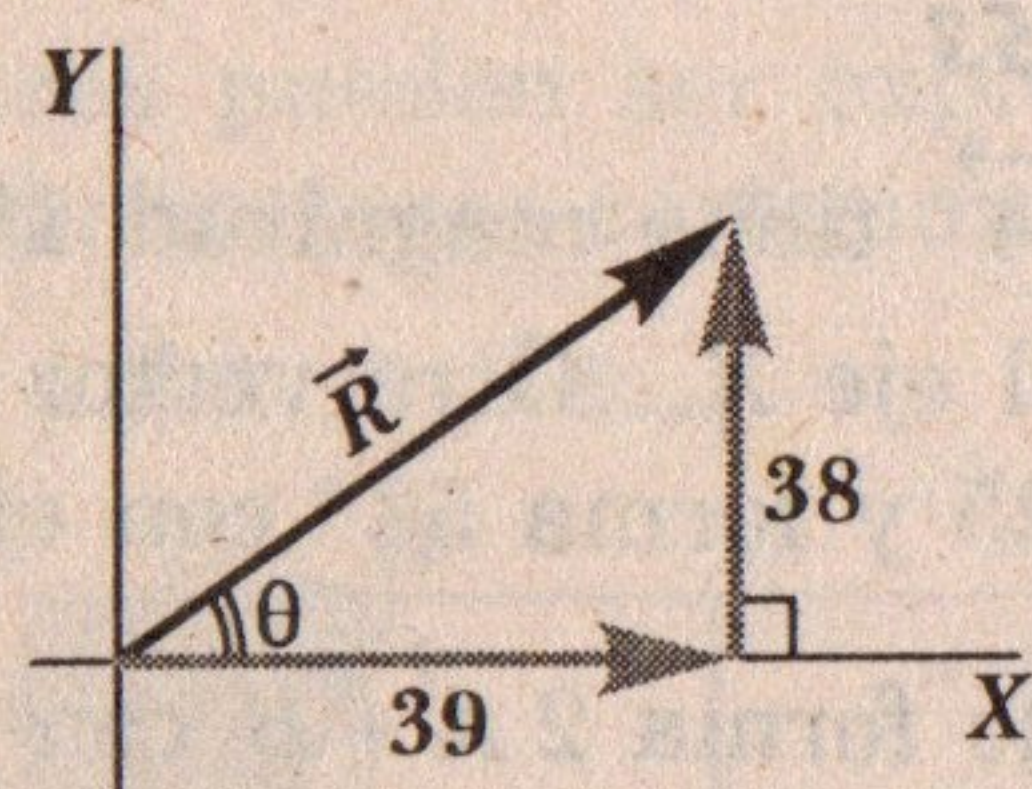
Luego :

$$\vec{R} = 2\vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = 2(12\hat{i} + 9\hat{j}) + 15\hat{i} + 20\hat{j}$$

$$\vec{R} = 39\hat{i} + 38\hat{j}$$

Graficando :



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{38}{39}$$

$$\therefore \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{38}{39} \right)$$

Clave: B**PROBLEMA 54**

La resultante de los vectores :

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} ; \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j}$$

tienen módulo igual a 10 y es paralela al eje Y de un sistema de coordenadas cartesianas.

Hallar los valores de m y n.

- A)  $m = -1$     B)  $m = 1$     C)  $m = -1$   
        $n = 1$          $n = -1$          $n = -1$   
 D)  $m = 2$     E)  $m = 1$   
        $n = -1$          $n = 1$

**RESOLUCIÓN**

Datos :

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} = (3, 4)$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} = (-2, 5)$$

$$\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j} = (m, n)$$

Pero :  $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} ; R = 10$

Si está en el eje Y :

$$\vec{R} = 10\hat{j} = (0, 10)$$

Sumando :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3, 4) + (-2, 5) + (m, n)$$

e igualando :

$$(0, 10) = (1 + m, 9 + n)$$

$$m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$$

$$9 + n = 10 \rightarrow n = 1$$

Clave: A**Nota:**

Este problema admite otra solución

Cuando :  $\vec{R} = -10\hat{j}$

¡Resuélvalo y obtendrá!

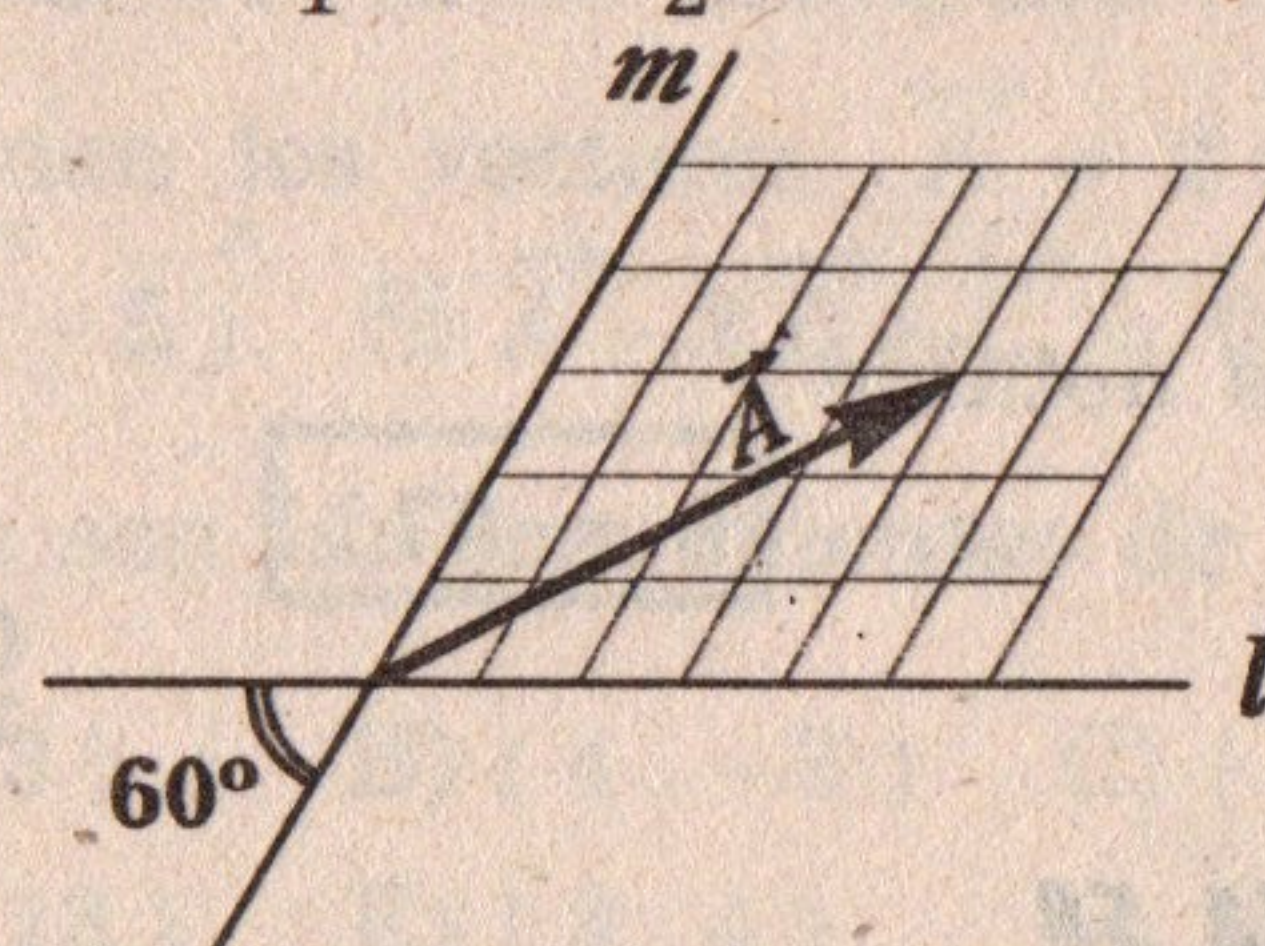
$$m = -1$$

$$n = -19$$

**PROBLEMA 55** (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Los vectores unitarios en los ejes "l" y "m" son  $\vec{\mu}_1$  y  $\vec{\mu}_2$ , respectivamente.

El vector  $\vec{A}$  está contenido en el plano determinado por estos ejes, los mismos que entre sí forman  $60^\circ$ . Expresa  $\vec{A}$  en función de  $\vec{\mu}_1$  y  $\vec{\mu}_2$ .



A)  $\vec{A} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$     B)  $\vec{A} = 2\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$

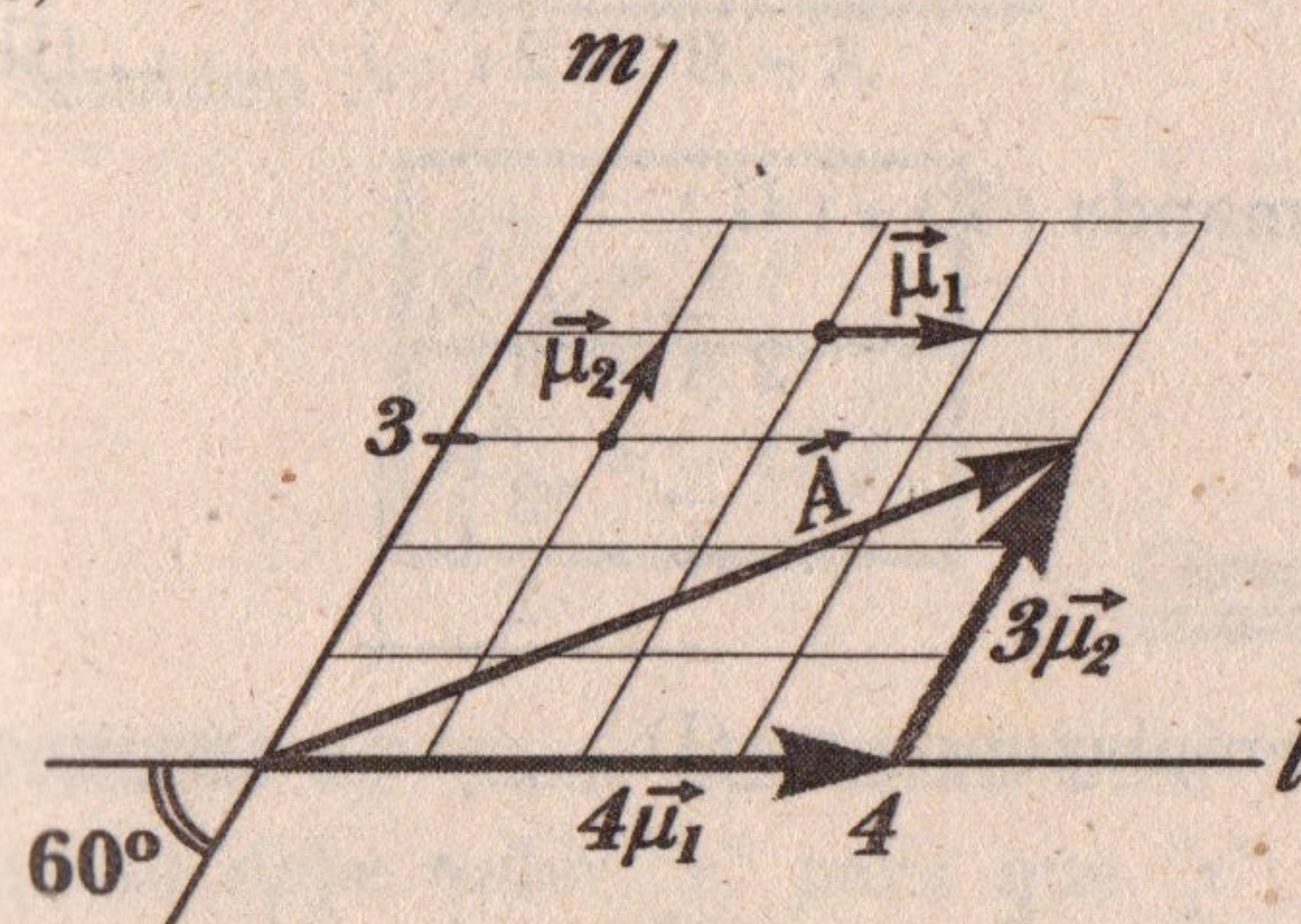
C)  $\vec{A} = 3\vec{\mu}_1 + 2\vec{\mu}_2$     D)  $\vec{A} = 4\vec{\mu}_1 + 3\vec{\mu}_2$

E) Faltan datos

**RESOLUCIÓN**

Las componentes de  $\vec{A}$  lo hallamos de modo similar a cuando se tiene ejes cartesianos.

(cada cuadrícula contiene 1 vector unitario)

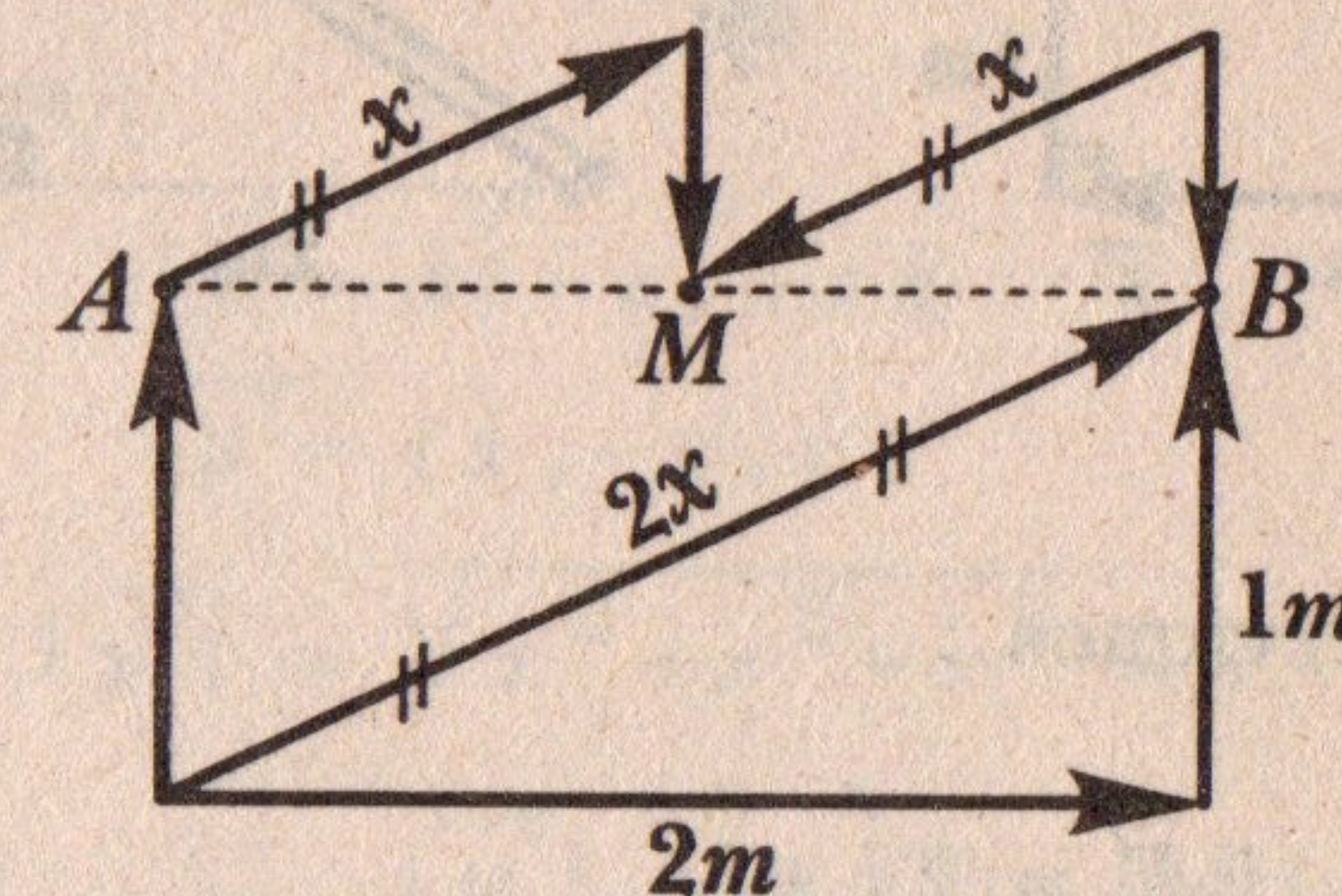


Luego :

$$\vec{A} = 4\vec{\mu}_1 + 3\vec{\mu}_2$$

Clave: D**PROBLEMA 56** (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

Si los vectores de longitudes x y 2x son paralelos y M es punto medio de AB, halle el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



A)  $2\sqrt{15}m$     B)  $\sqrt{5}m$     C)  $2\sqrt{5}m$

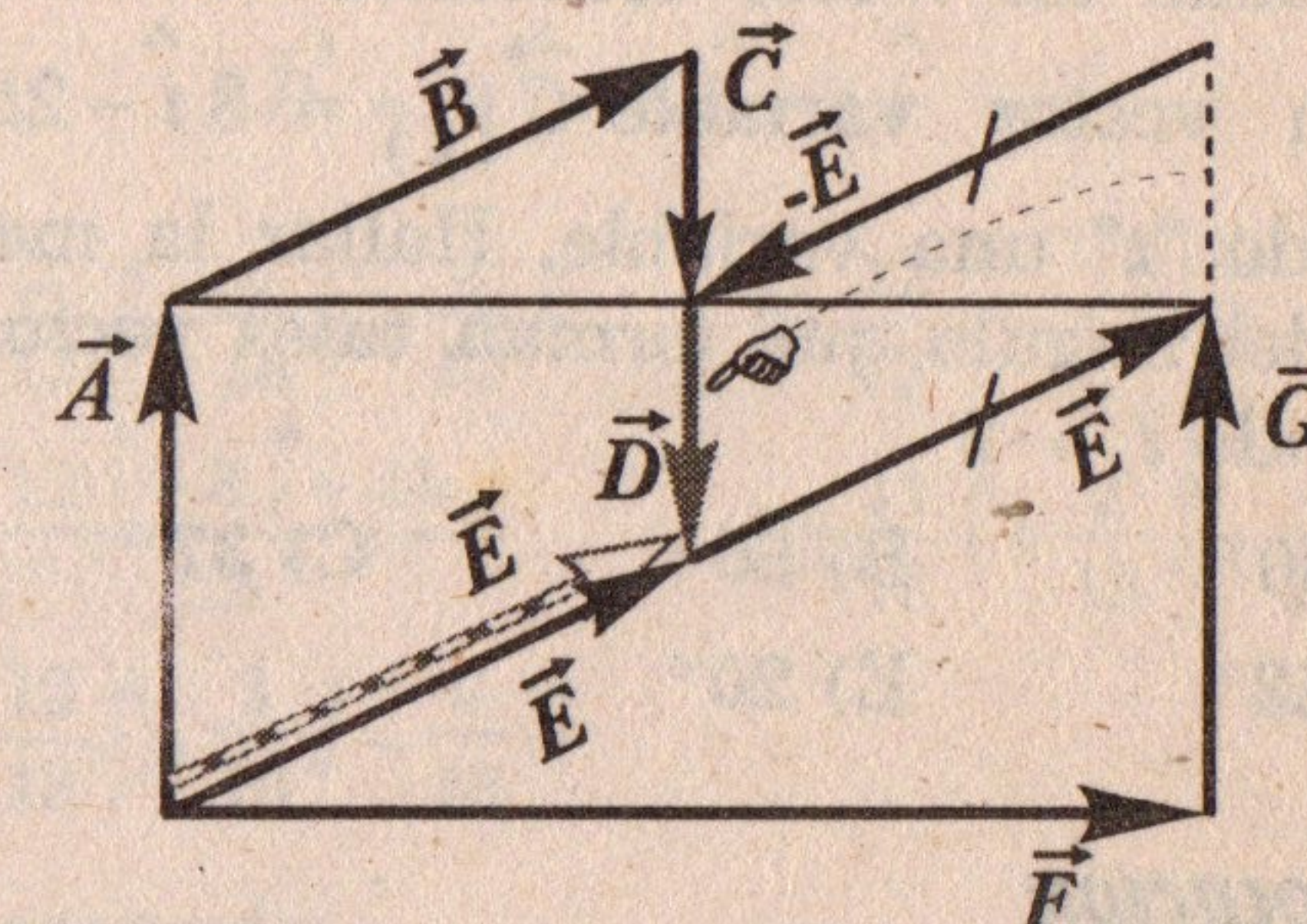
D)  $\sqrt{10}m$     E)  $4\sqrt{5}m$

**RESOLUCIÓN**

\* Trasladamos vectores.

\* Partimos vectores.

La figura quedará :



Notamos :

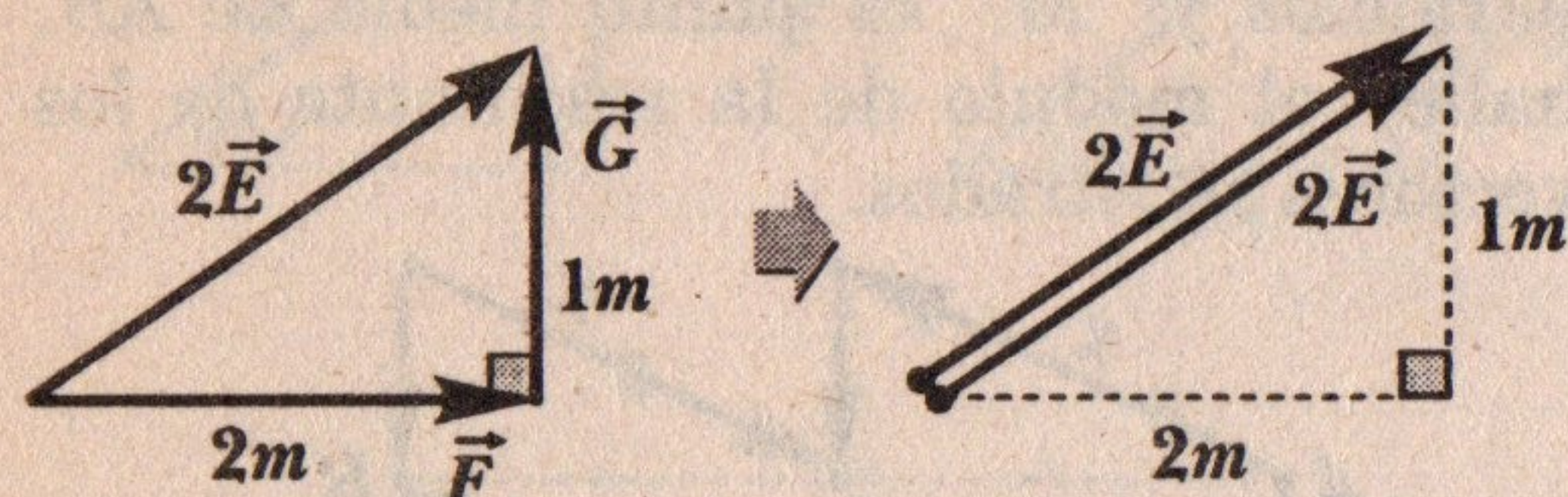
\*  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{E}$

\* Vectores opuestos se anulan

$$\vec{E} + (-\vec{E}) = 0$$



Redibujando, queda :



Observamos :

$$2\vec{E} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

$$2E = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Finalmente :

$$R = 4E = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \boxed{R = 2\sqrt{5} \text{ m}}$$

### PROBLEMA 57

Se tiene un vector constante  $\vec{V} = -3\hat{j}$  y un vector variable  $\vec{C}_{(t)} = 3\hat{i} - 2t\hat{j}$ , siendo "t" una variable. Hallar la medida del ángulo que forman tales vectores cuando  $t = 2$ .

- A)  $30^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $37^\circ$   
D)  $53^\circ$       E)  $20^\circ$

### RESOLUCIÓN

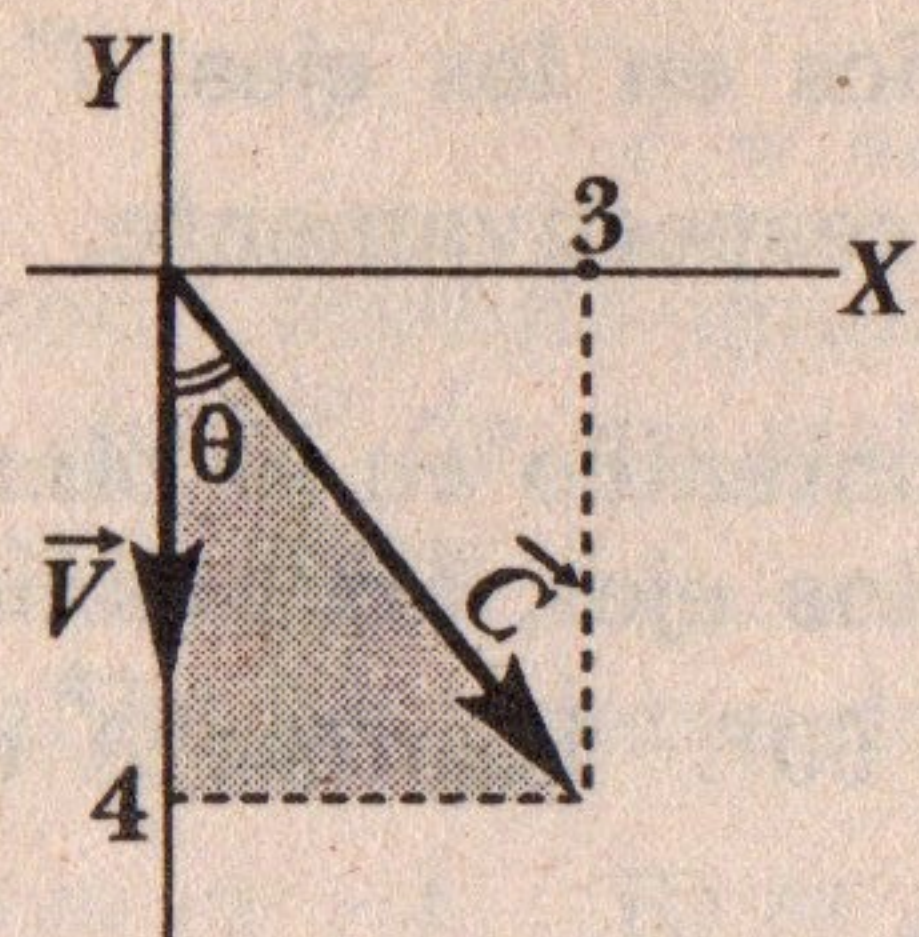
\* El vector constante :  $\vec{V} = -3\hat{j}$

\* El vector variable :

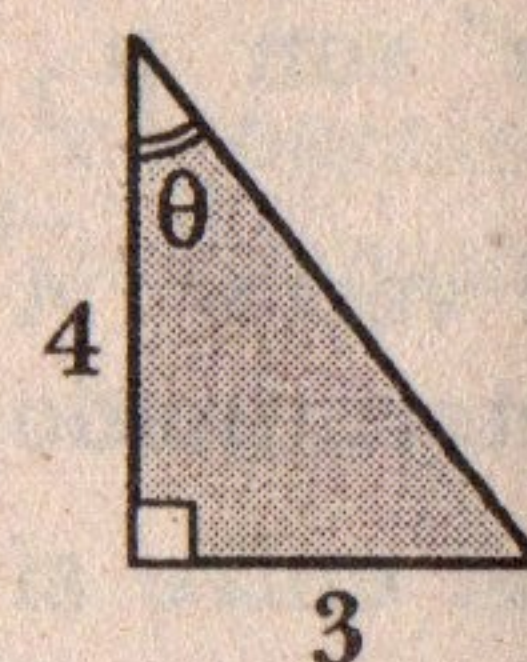
$$\vec{C} = 3\hat{i} - 2t\hat{j}$$

$$\text{si } t = 2 \Rightarrow \vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

Grafiquemos en los ejes cartesianos para calcular el ángulo que forman :



Piden "θ":



El  $\triangle$  es notable :

$$\therefore \boxed{\theta = 37^\circ}$$

Clave: C

### PROBLEMA 58

Se tienen 2 vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , tales que  $\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$  y  $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j}$ .

Hallar :  $A^2 - B^2$

- A) -1      B) 1      C) 2  
D) 3      E) 4

### RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} \quad \dots (I)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} \quad \dots (II)$$

Sumando (I) + (II) :

$$2\vec{A} = 3\hat{i}$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{3}{2}\hat{i}$$

Reemplazando en (I) :

$$\therefore \vec{B} = -\frac{\hat{i}}{2} + \hat{j}$$

Luego :

$$* A = \frac{3}{2}$$

$$* B = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$A^2 - B^2 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}$$

$$\therefore \boxed{A^2 - B^2 = 1}$$

Clave: B

### PROBLEMA 59 (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

Se tienen los vectores  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$  y  $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j}$ . Si  $\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

¿Cuáles son las componentes de  $\vec{C}$ ?

- A) (4, 3)      B) (4, -3)      C) (4, -13)  
D) (4, 13)      E) (3, 4)

### RESOLUCIÓN

Datos :  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} = (2, 3)$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} = (3, -5)$$

$$\text{Si : } \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\vec{C} = 2\vec{B} - \vec{A}$$

$$\vec{C} = 2(3, -5) - (2, 3)$$

$$\boxed{\vec{C} = (4, -13)} \quad \text{Rpta.}$$

O también :

$$\begin{aligned} \vec{C}_x &= 4\hat{i} \\ \vec{C}_y &= -13\hat{j} \end{aligned}$$

Clave: C

### PROBLEMA 60 (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Cuanto debe valer "x" para que "x" veces la suma de los vectores  $\hat{i}$ ,  $-\hat{j}$  y  $\hat{k}$  sea un vector unitario.

- A)  $\sqrt{3}$       B) 3      C)  $\sqrt{3}/2$   
D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       E)  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

### RESOLUCIÓN

$$x = ??$$

Por condición del problema.

$$x(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \vec{\mu}$$

Luego :

$$\vec{\mu} = x\hat{i} - x\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{\mu} = (x, -x, x)$$

$$|\vec{\mu}| = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$$

Pero :  $|\vec{\mu}| = 1$  (Por teoría)

$$1 = x\sqrt{3}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Clave: D

### PROBLEMA 61 (Sem. CEPRE-UNI 98-II)

Determinar el vector unitario que sea paralelo a la suma de los vectores :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k} \quad \text{y}$$

$$\vec{B} = 9\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$A) \frac{2}{13}\hat{i} + \frac{3}{13}\hat{j} + \frac{4}{13}\hat{k} \quad B) \frac{12}{13}\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$C) \frac{12\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}}{13} \quad D) \frac{12}{13}\hat{i} + \frac{2}{13}\hat{j} + \frac{4}{13}\hat{k}$$

$$E) \frac{12}{13}\hat{i} - \frac{3}{13}\hat{j} - \frac{4}{13}\hat{k}$$

### RESOLUCIÓN

$$\text{Si } \vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k} = (3, -2, 7)$$

$$\vec{B} = 9\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} = (9, 5, -3)$$

Luego :

$$\vec{A} + \vec{B} = (12, 3, 4)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}$$



$$|\vec{A} + \vec{B}| = 13$$

Nos piden un vector unitario  $\vec{\mu} // \vec{A} + \vec{B}$

Luego :

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|}$$

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{(12, 3, 4)}{13}$$

$$\therefore \vec{\mu} = \frac{12}{13} \hat{i} + \frac{3}{13} \hat{j} + \frac{4}{13} \hat{k}$$

Clave: C

### PROBLEMA 62 (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

Encuentre el vector  $\vec{A}$  que tiene 12 unidades de longitud con la misma dirección que  $3\hat{i} - 4\hat{j}$ .

A)  $3\hat{i} - 4\hat{j}$       B)  $\frac{48}{5}\hat{i} - \frac{36}{5}\hat{j}$

C)  $\frac{36}{5}\hat{i} - \frac{48}{5}\hat{j}$       D)  $\frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}$

E)  $36\hat{i} - 48\hat{j}$

### RESOLUCIÓN

Nos piden :  $\vec{A} = ??$  ;  $A = 12$

Además :  $\vec{A} // \vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$

Luego :

Ambos tienen igual vector unitario.

$$\frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{B}}{B} \Rightarrow \vec{A} = \frac{A}{B} \cdot \vec{B}$$

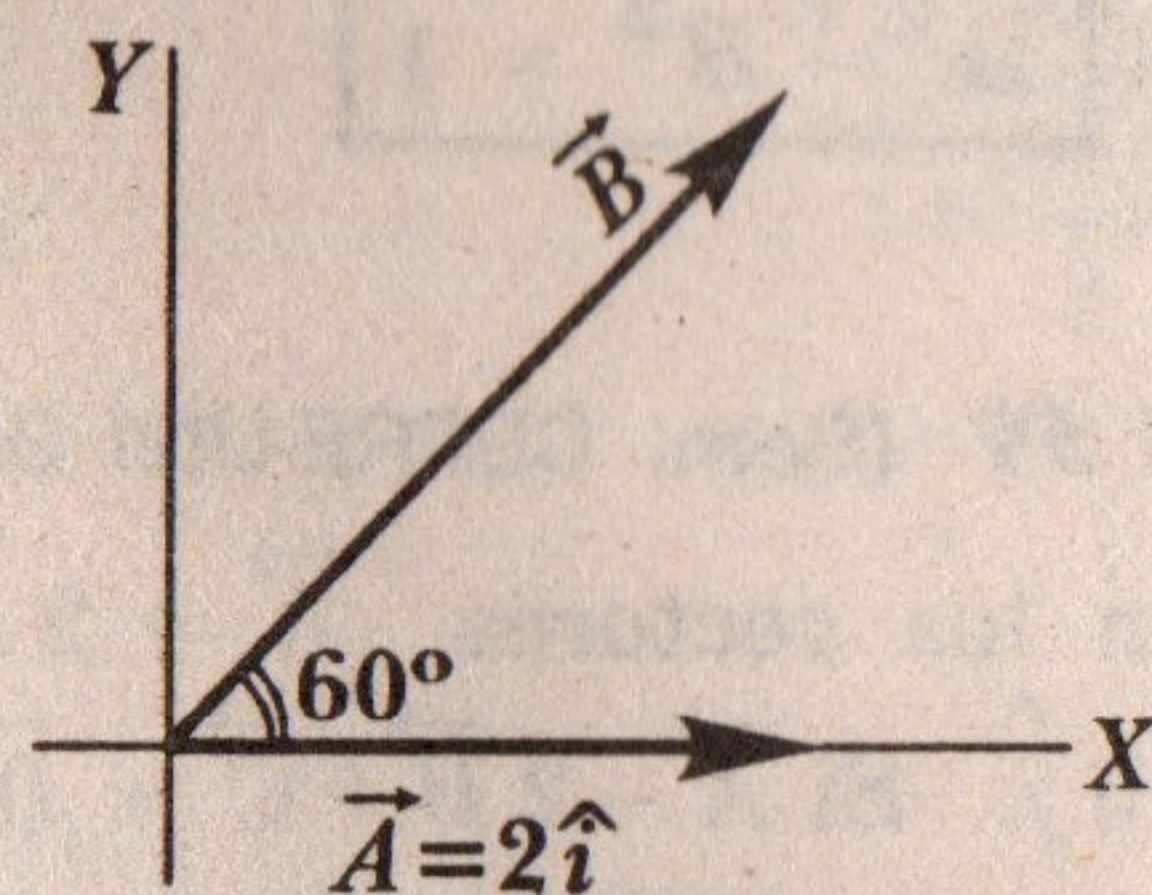
$$\vec{A} = \frac{12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j})$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{36}{5}\hat{i} - \frac{48}{5}\hat{j}$$

Clave: C

### PROBLEMA 63 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

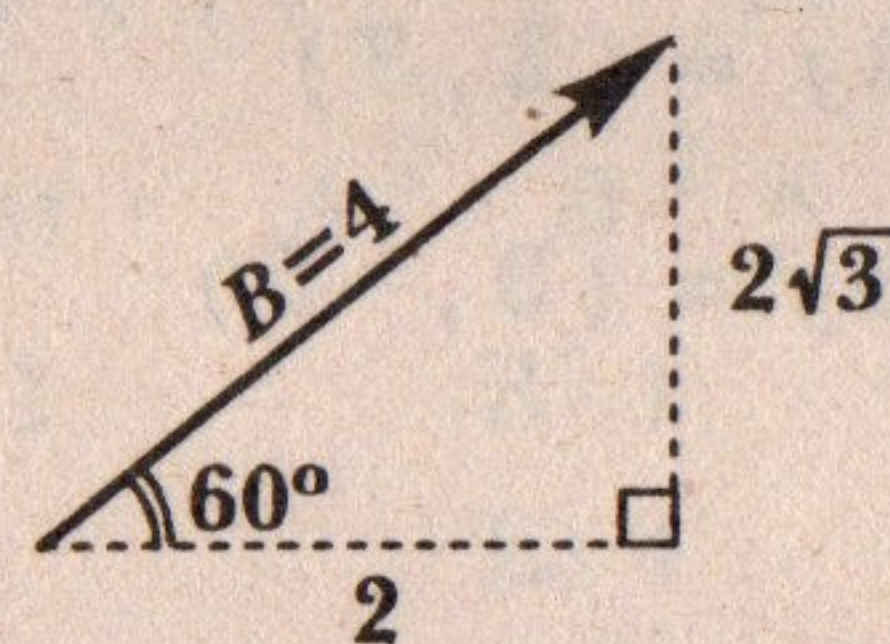
Si  $\vec{A} = 2\hat{i}$  y  $B = 4$ , calcular el módulo de la componente paralela a  $\vec{A}$  de la resultante de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .



- A) 2      B) 4      C) 8      D) 5      E) 0

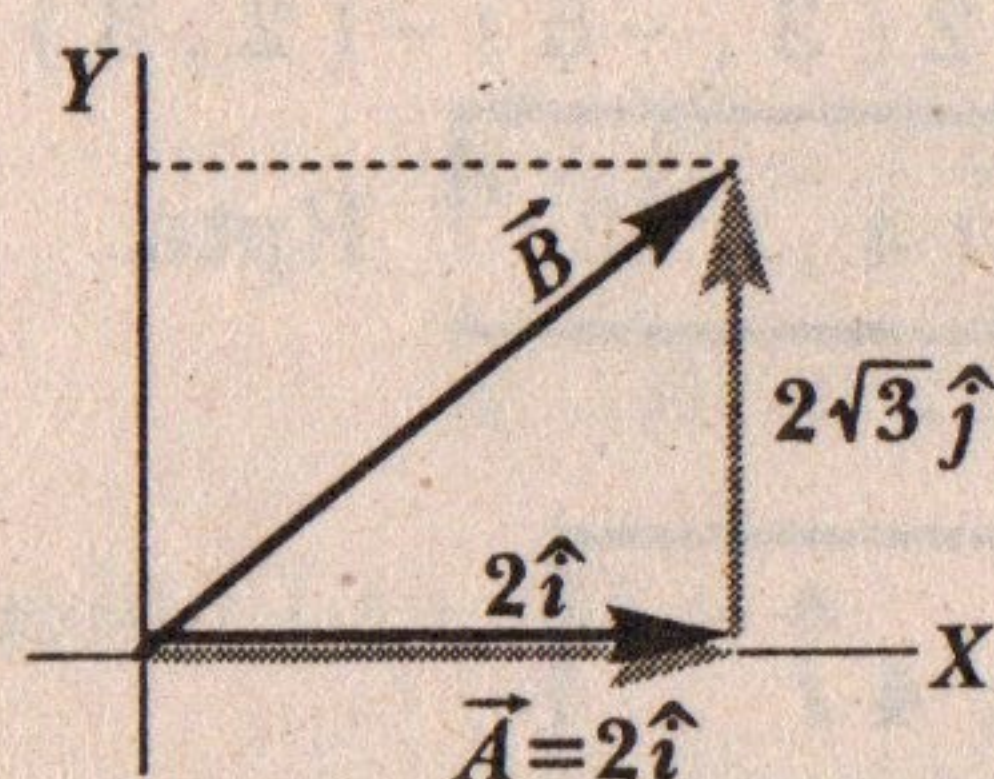
### RESOLUCIÓN

Calculemos previamente las componentes de  $\vec{B}$ .



\* Observar que el triángulo es notable y se puede calcular sus catetos.

Calculemos la resultante de  $\vec{A} + \vec{B}$ .



$$\vec{A} = 2\hat{i}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = 4\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$$

$$\vec{R}_x \quad \vec{R}_y$$

Nos piden el módulo de la componente de  $\vec{A} + \vec{B}$  en la dirección de  $\vec{A}$ , es decir, sobre el eje "X"

$$\therefore R_x = 4$$

Clave: B

### PROBLEMA 64 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

La suma de los vectores  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  es  $(\hat{i} + 3\hat{j})$  y la diferencia  $\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = 3\hat{i} - \hat{j}$ .

Hallar la medida del ángulo entre  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$ .

- A)  $90^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $37^\circ/2$   
D)  $53^\circ/2$       E)  $45^\circ$

### RESOLUCIÓN

Dato :  $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \hat{i} + 3\hat{j}$  ... (I)

$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = 3\hat{i} - \hat{j}$  ... (II)

Resolviendo (I) + (II) :

$$2\vec{A}_1 = 4\hat{i} + 2\hat{j}$$

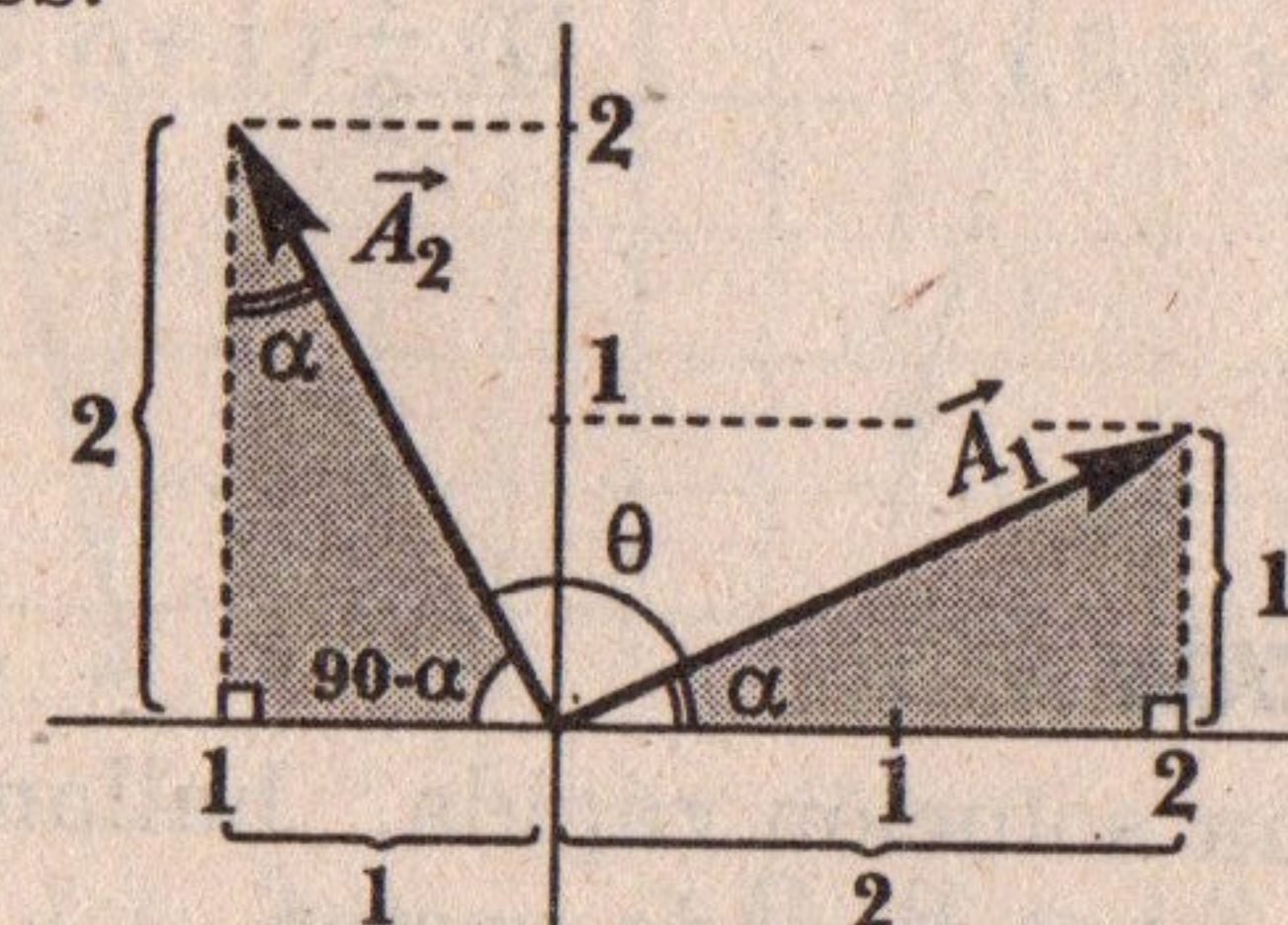
$$\vec{A}_1 = 2\hat{i} + \hat{j}$$

Resolviendo (I) - (II) :

$$2\vec{A}_2 = -2\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{A}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j}$$

Para hallar el ángulo, graficamos ambos vectores.



\* Observamos que los triángulos sombreados son iguales.

\* Luego el ángulo "θ" será :

$$\theta = 90^\circ$$

Clave: A

Nota:

Otro método de solución, ver prob. 130

### PROBLEMA 65

La suma de los vectores:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B}$$

dan como resultante  $\vec{R} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$ . Calcular el vector unitario paralelo a  $\vec{A} - 2\vec{B}$ .

A)  $\frac{5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{33}}$

B)  $\frac{5\hat{i} + 12\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{170}}$

C)  $\frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$

D)  $\frac{5\hat{i} + 12\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{173}}$

E)  $\frac{5\hat{i} + 2\hat{j} + 12\hat{k}}{\sqrt{173}}$

### RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (3, -2, 4)$$

$$\vec{R} = (2, -4, 0)$$

Pero :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \vec{R} - \vec{A}$$

Restando :

$$\vec{B} = (-1, -2, -4)$$

Luego :

$$\vec{A} - 2\vec{B} = (3, -2, 4) - 2(-1, -2, -4)$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = (5, 2, 12)$$

$$|\vec{A} - 2\vec{B}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 12^2}$$

$$|\vec{A} - 2\vec{B}| = \sqrt{173}$$

El vector unitario "μ" será :

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A} - 2\vec{B}}{|\vec{A} - 2\vec{B}|} = \frac{(5, 2, 12)}{\sqrt{173}}$$



o también :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{173}} (5\hat{i} + 2\hat{j} + 12\hat{k})$$

Clave: E

**PROBLEMA 66** (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Si  $\hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  y  $\hat{v} = (\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$

Calcular :  $\vec{A} - \vec{B}$  donde :

$$\vec{A} = 3\hat{\mu}$$

$$\vec{B} = 2\hat{v}$$

- A)  $0,32\hat{i} + 3,14\hat{j} + \hat{k}$   
 B)  $0,32\hat{i} - 3,14\hat{j}$   
 C)  $0,32\hat{i} + 3,14\hat{j} + 1,73\hat{k}$   
 D)  $0,32\hat{j} - 1,73\hat{k}$   
 E)  $1,32\hat{i} + 3,14\hat{j} + 1,73\hat{k}$

**RESOLUCIÓN**

Observamos que  $\hat{\mu}$  y  $\hat{v}$  son vectores unitarios.

$$\text{Luego : } \hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\vec{A} = 3\hat{\mu} = \frac{3}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\vec{A} = \sqrt{3}(1, 1, 1)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{B} = 2\hat{v} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{B} = \sqrt{2}(1, -1, 0)$$

Nos piden  $\vec{A} - \vec{B} = ??$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) - (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3})$$

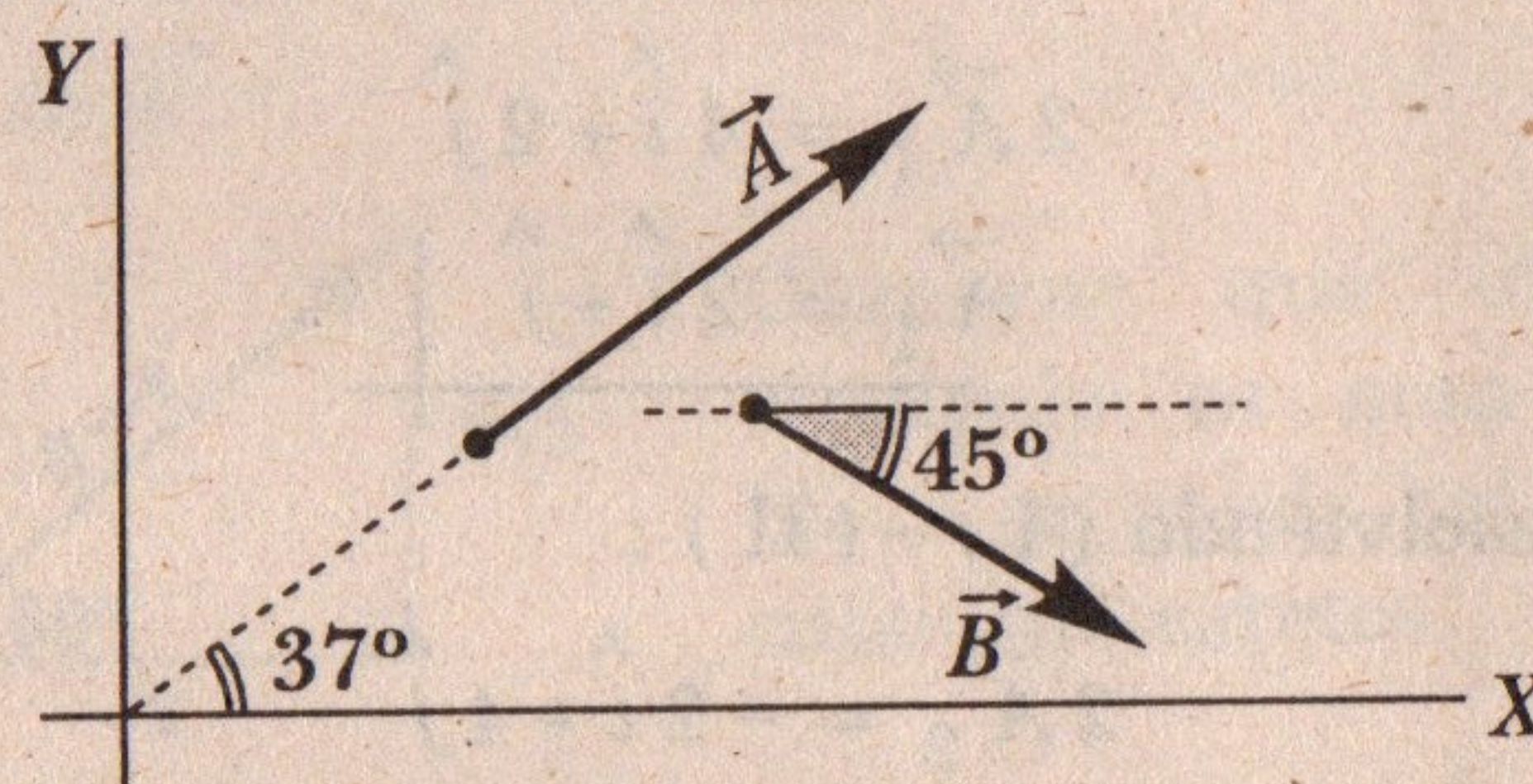
$$\Rightarrow \vec{A} - \vec{B} = (0,32; 3,14; 1,73)$$

$$\therefore \vec{A} - \vec{B} = 0,32\hat{i} + 3,14\hat{j} + 1,73\hat{k}$$

Clave: C

**PROBLEMA 67** (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

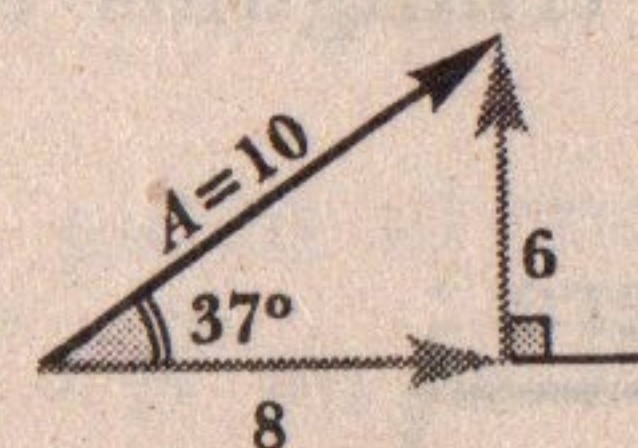
Se tienen los vectores A y B según la figura mostrada. Si  $A = 10$  y  $B = 2\sqrt{2}$ , hallar el vector unitario de  $\vec{A} - \vec{B}$ .



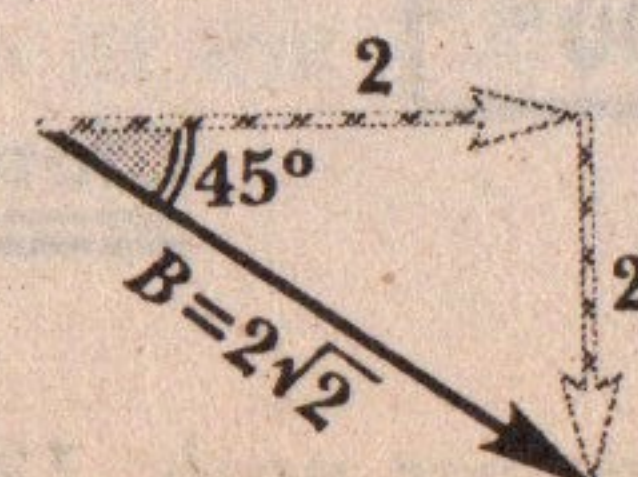
- A)  $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j})$       B)  $\frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$   
 C)  $\frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{j})$       D)  $\frac{1}{2}(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$   
 E)  $\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$

**RESOLUCIÓN**

Para una solución rápida, hallamos las componentes de cada vector.



$$\vec{A} = 8\hat{i} + 6\hat{j} = (8, 6)$$



$$\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} = (2, -2)$$

Luego :

$$\vec{A} - \vec{B} = (8, 6) - (2, -2)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (6, 8) = 2(3, 4)$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = 2 \times \sqrt{3^2 + 4^2} = 2 \times 5$$

El vector unitario de  $\vec{A} - \vec{B}$  será :

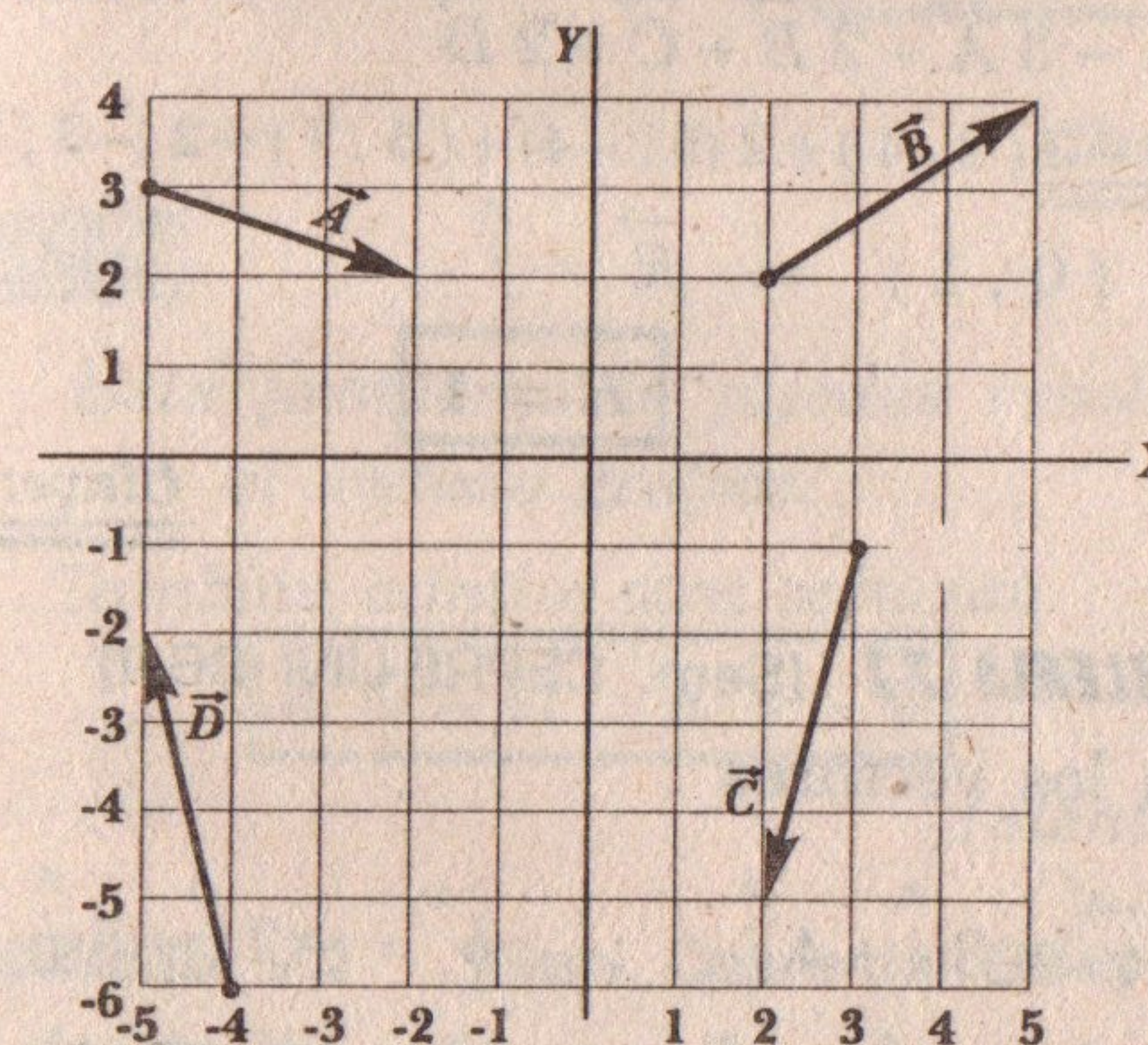
$$\hat{\mu} = \frac{\vec{A} - \vec{B}}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \frac{2(3, 4)}{2 \times 5}$$

$$\therefore \hat{\mu} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

Clave: B

**PROBLEMA 68**

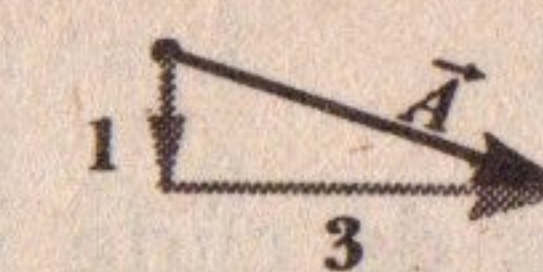
Se tienen cuatro vectores dispuestos como se muestra en la figura. Hallar el vector resultante de la suma de estos vectores.



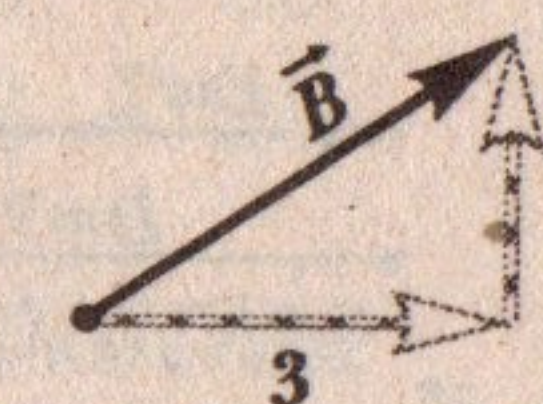
- A)  $\vec{R} = (1, 2)$       B)  $\vec{R} = (3, 4)$   
 C)  $\vec{R} = (4, 2)$       D)  $\vec{R} = (4, 1)$   
 E)  $\vec{R} = (1, 4)$

**RESOLUCIÓN**

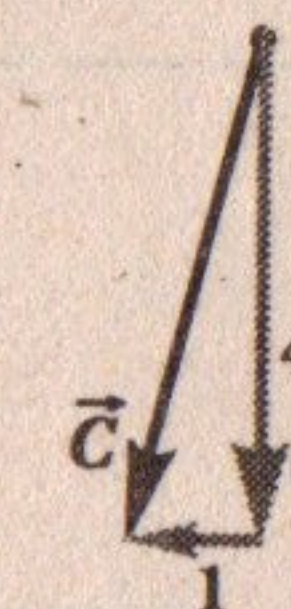
Hallamos las componentes de cada vector, y tomando como medida las cuadrículas.



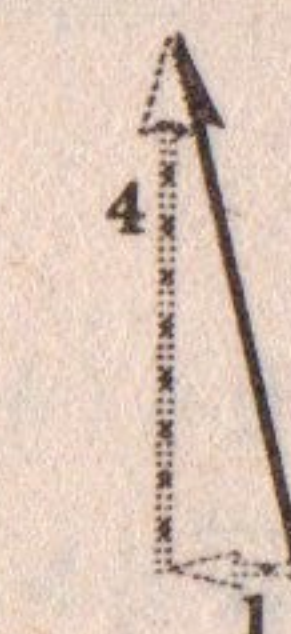
$$\vec{A} = -\hat{j} + 3\hat{i} = (3, -1)$$



$$\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} = (3, 2)$$



$$\vec{C} = -4\hat{j} - \hat{i} = (-1, -4)$$



$$\vec{D} = -\hat{i} + 4\hat{j} = (-1, 4)$$

La resultante " $\vec{R}$ " será :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

$$\vec{R} = (3; -1) + (3, 2) + (-1, -4) + (-1, 4)$$

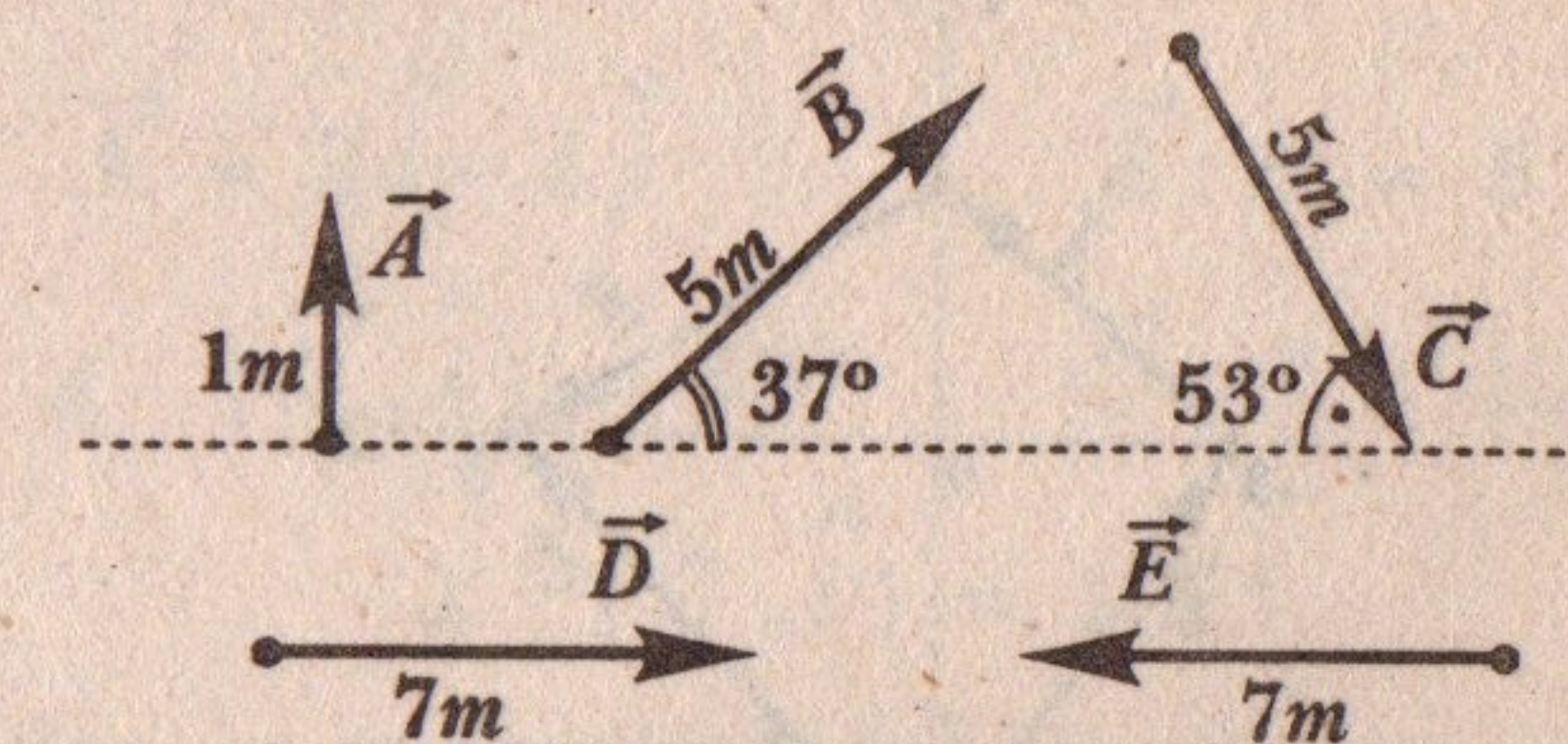
$$\vec{R} = (4, 1)$$

$$\therefore \vec{R} = 4\hat{i} + \hat{j}$$

Clave: D

**PROBLEMA 69**

Escoja entre los vectores que se muestran el mejor vector que sumado a los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ . De como resultado el vector nulo.

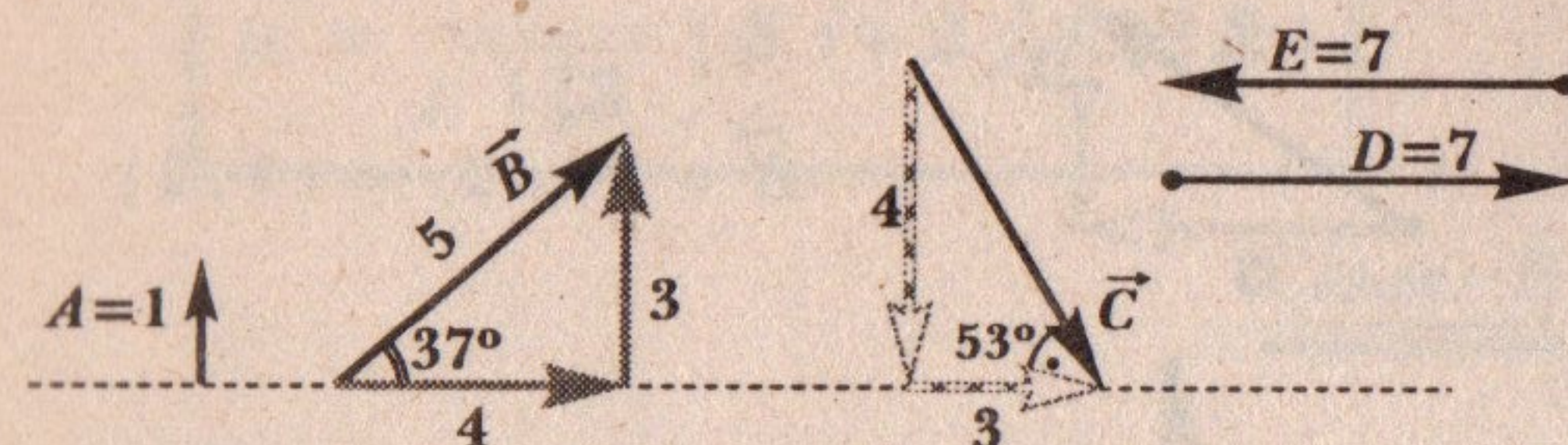


- A)  $\vec{A}$       B)  $\vec{B}$       C)  $\vec{C}$   
 D)  $\vec{D}$       E)  $\vec{E}$



# RESOLUCIÓN

Hallemos las componentes de cada vector.



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \hat{j} \\ \vec{B} &= 4\hat{i} + 3\hat{j} \\ \vec{C} &= -4\hat{j} + 3\hat{i}\end{aligned}$$

Condición del problema :

$$\begin{aligned}\vec{x} + (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) &= \vec{0} \\ \vec{x} + (7\hat{i} + 0\hat{j}) &= \vec{0} \\ \vec{x} + 7\hat{i} &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\vec{x} = -7\hat{i}$$

Notamos en la figura:  $\vec{E} = -7\hat{i}$

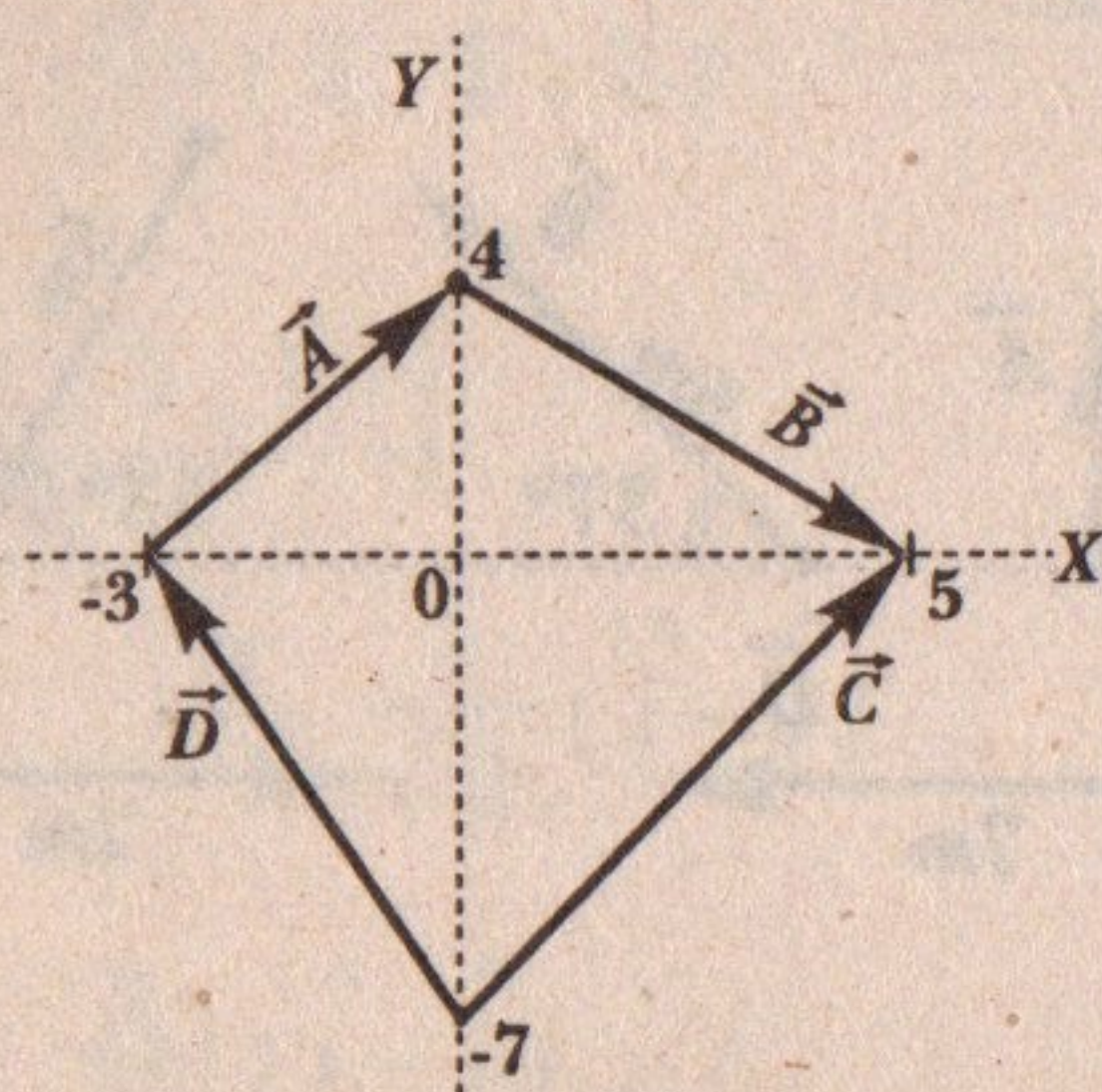
∴ **Se debe agregar  $\vec{E}$**

Clave: E

## PROBLEMA 70 (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$  según la figura, determine el módulo del vector

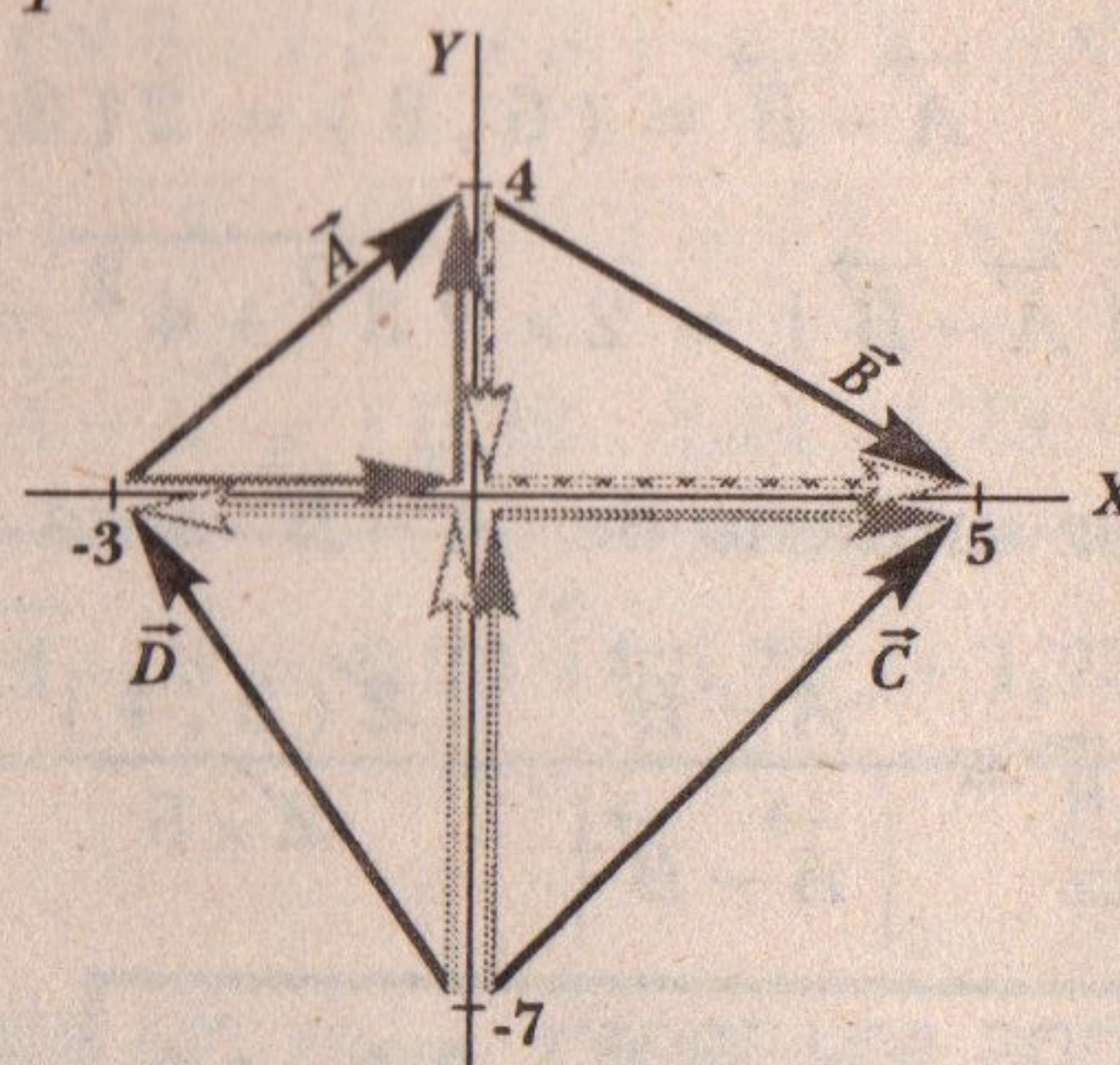
$$\vec{R} = -3\vec{A} + 2\vec{B} + \vec{C} + 2\vec{D}$$



- A) 1      B) 2      C) 3  
D) 0      E) 1/2

# RESOLUCIÓN

Graficando y descomponiendo en los ejes "X" e "Y"



$$\begin{aligned}\vec{A} &= 3\hat{i} + 4\hat{j} = (3, 4) \\ \vec{B} &= -4\hat{j} + 5\hat{i} = (5, -4) \\ \vec{C} &= 7\hat{j} + 5\hat{i} = (5, 7) \\ \vec{D} &= 7\hat{j} - 3\hat{i} = (-3, 7)\end{aligned}$$

Luego :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= -3\vec{A} + 2\vec{B} + \vec{C} + 2\vec{D} \\ \vec{R} &= -3(3, 4) + 2(5, -4) + (5, 7) + 2(-3, 7) \\ \vec{R} &= (0, 1) \Rightarrow \vec{R} = \hat{j}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{R = 1}$$

Clave: A

## PROBLEMA 71 (Sem. CEPRE-UNI 96-II)

Sean los vectores :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\hat{i} + 4\hat{j} ; \quad \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} \\ \vec{c} &= m\hat{i} + n\hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

donde  $|\vec{R}| = 10$ , y además  $\vec{R}$  es paralelo al eje X del sistema de coordenadas. Hallar  $m$  y  $n$ .

- A)  $m = -9$     B)  $m = 9$     C)  $m = 9$   
                     $n = 9$                        $n = 9$                        $n = -9$   
D)  $m = 12$     E)  $m = -1$   
                     $n = -12$                        $n = 1$

# RESOLUCIÓN

Nos dicen :

$R = 10$  y es paralelo al eje X

$$\therefore \vec{R} = 10\hat{i} \quad (\hat{i} : \text{indica la dirección})$$

También :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (3, 4) \\ \vec{B} &= (-2, 5) \\ \vec{C} &= (m, n)\end{aligned}$$

Pero :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$10\hat{i} = (1 + m, n + 9)$$

$$10\hat{i} = (1 + m)\hat{i} + (n + 9)\hat{j}$$

Igualando :

$$\begin{aligned}m + 1 &= 10 \rightarrow \boxed{m = 9} \\ n + 9 &= 0 \rightarrow \boxed{n = -9}\end{aligned}$$

Clave: C

**Nota:**

\* Este problema lo puedes resolver por el método gráfico.

\* También admite otra solución.

$$\boxed{n = -11 ; n = -9}$$

*¡Intentalo!*

## PROBLEMA 72 (Sem. Cepre-Uni 99-II)

Se tienen los vectores :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 3\hat{i} + 4\hat{j} ; \quad \vec{B} = 4\hat{i} + 5\hat{j} \\ \vec{C} &= 17\hat{i} + 16\hat{j}\end{aligned}$$

¿Cuales son los valores mínimos y enteros de "α" y "β" para que cumpla la siguiente ecuación :

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

- A)  $\alpha = 1$     B)  $\alpha = 10$     C)  $\alpha = 21$   
                     $\beta = 2$                        $\beta = 20$                        $\beta = -20$

- D)  $\alpha = 20$     E)  $\alpha = 21$   
                     $\beta = 21$                        $\beta = 20$

# RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\text{Datos :} \quad \vec{A} &= (3, 4) \\ \vec{B} &= (4, 5) \\ \vec{C} &= (17, 16)\end{aligned}$$

Se cumple :

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\alpha(3, 4) + \beta(4, 5) + (17, 16) = (0, 0)$$

$$(3\alpha + 4\beta + 17, 4\alpha + 5\beta + 16) = (0, 0)$$

Resolviendo

$$3\alpha + 4\beta + 17 = 0$$

$$4\alpha + 5\beta + 16 = 0$$

$$3\alpha + 4\beta = -17 \quad \dots (I)$$

$$4\alpha + 5\beta = -16 \quad \dots (II)$$

De (I) y (II) obtenemos :

$$\boxed{\alpha = 21}$$

$$\boxed{\beta = -20}$$

Clave: C

## PROBLEMA 73

Se tienen tres vectores en el plano XY con las siguientes características :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} ; \quad \vec{B} : B = 5 ,$$

$$\angle (\vec{B}, \hat{i}) = 53^\circ ; \quad \vec{C} : C = 10 ,$$

$$\angle (C, \hat{i}) = 127^\circ$$

Hallar la magnitud del vector resultante  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ .

- A) 5      B) 10      C) 6  
D) 4      E) 8

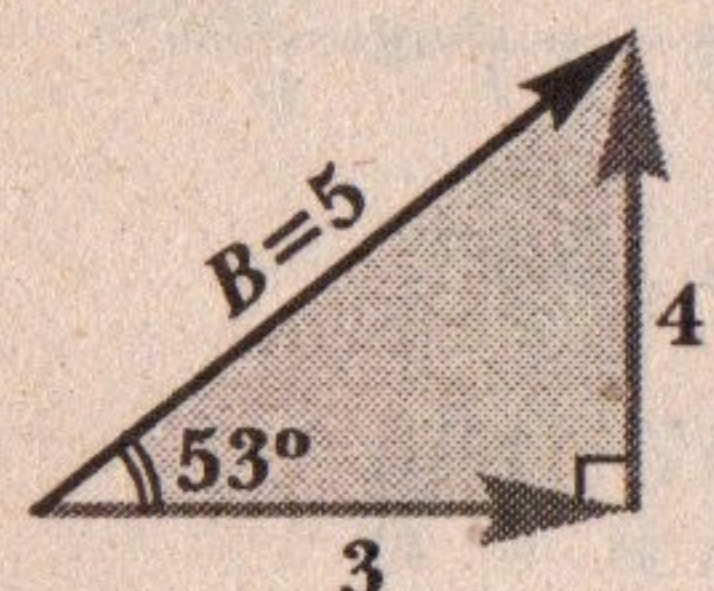


**RESOLUCIÓN**

Halle las componentes cartesianas de cada vector.

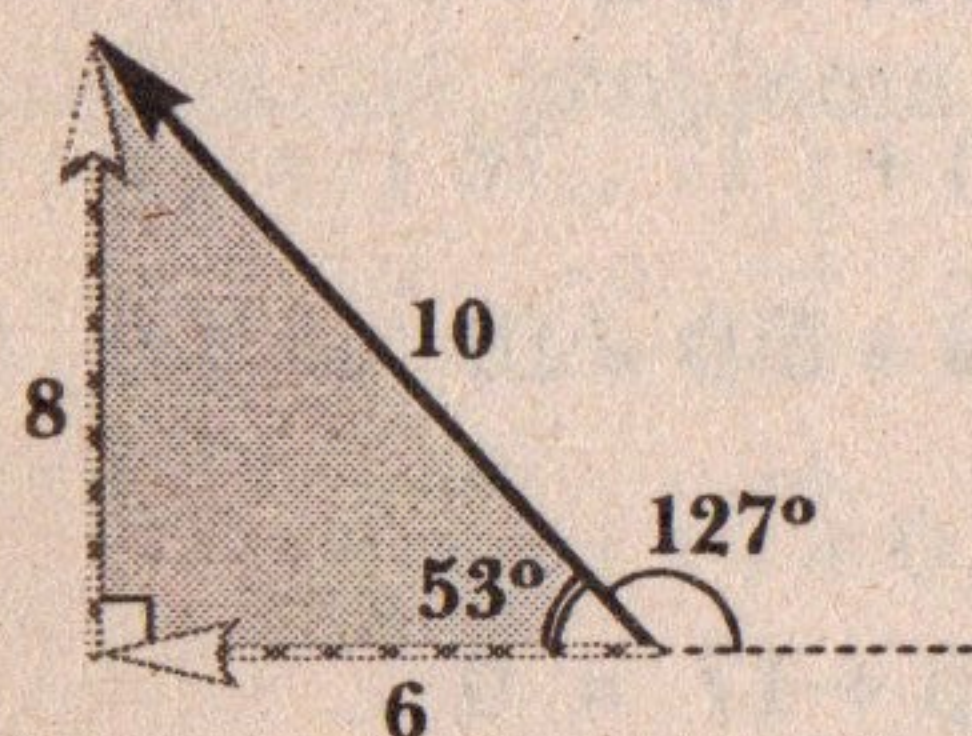
$$* \vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$* \vec{B} = ??$$



$$\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$* \vec{C} = ??$$



$$\vec{C} = -6\hat{i} + 8\hat{j}$$

Luego :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Reemplazando :

$$\vec{R} = 0\hat{i} + 8\hat{j}$$

$$\vec{R} = 8\hat{j}$$

$$\therefore \boxed{R = 8}$$

**PROBLEMA 74**

Hallar el vector unitario paralelo a la recta cuya ecuación es  $y = -5x + 15$

$$A) \frac{(1, 5)}{\sqrt{26}} \quad B) \frac{(-1, 5)}{\sqrt{26}}$$

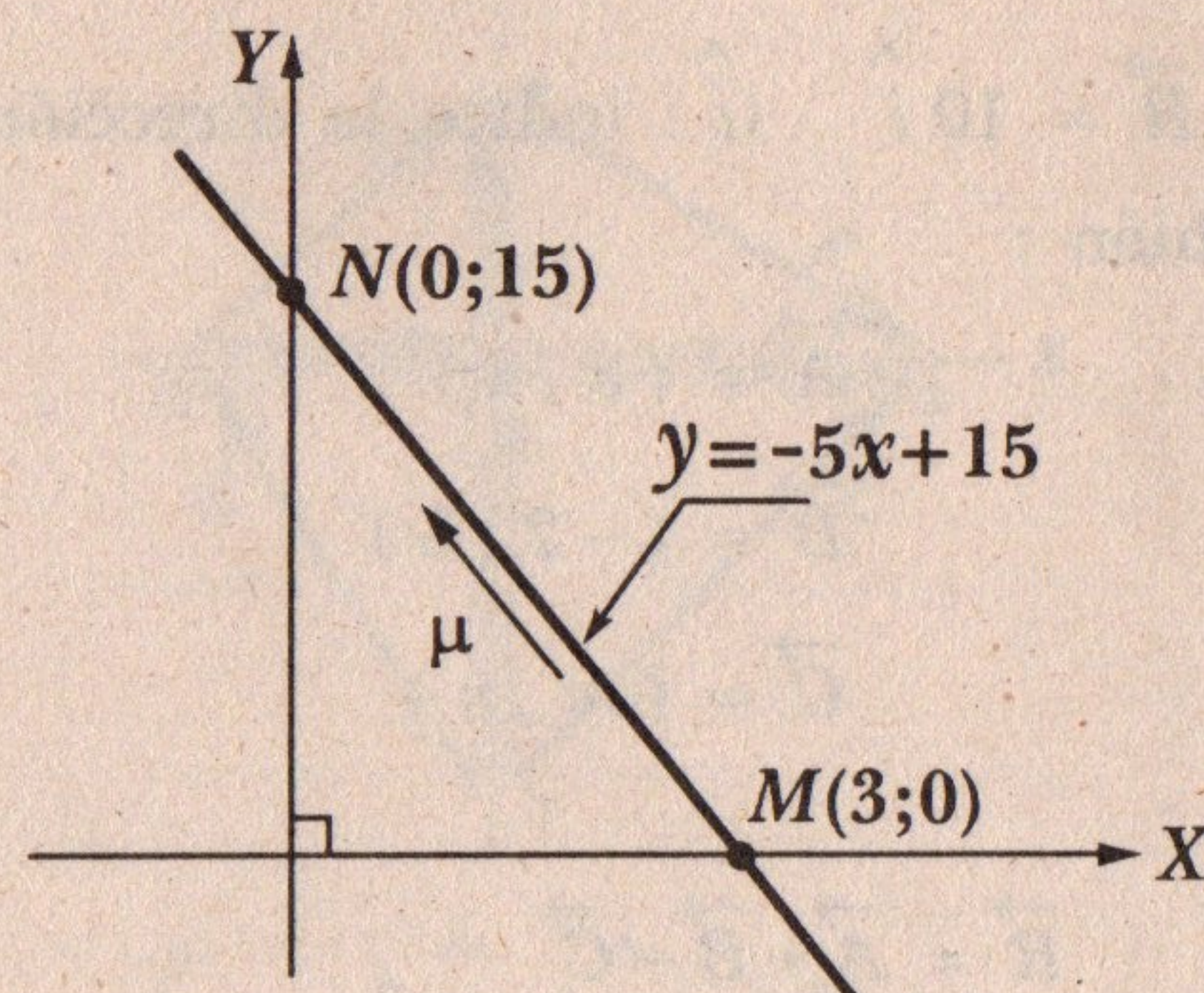
$$C) \frac{(5, -1)}{\sqrt{26}} \quad D) \frac{(5, 1)}{\sqrt{26}}$$

$$E) \frac{(-1, -5)}{\sqrt{26}}$$

**RESOLUCIÓN**

Graficamos la ecuación de la recta.

$$y = -5x + 15 \quad \text{Si : } \begin{cases} x = 0 ; y = 15 \\ y = 0 ; x = 3 \end{cases}$$



El vector  $\vec{MN}$  se calculará, así :

$$\vec{MN} = (0, 15) - (3, 0)$$

$$\vec{MN} = (-3, 15) = 3(-1, 5)$$

$$|\vec{MN}| = 3\sqrt{1^2 + 5^2} = 3\sqrt{26}$$

El vector unitario será :

$$\mu = \frac{\vec{MN}}{|\vec{MN}|} = \frac{3(-1, 5)}{3\sqrt{26}}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{26}}(-1, 5)$$

Clave: B

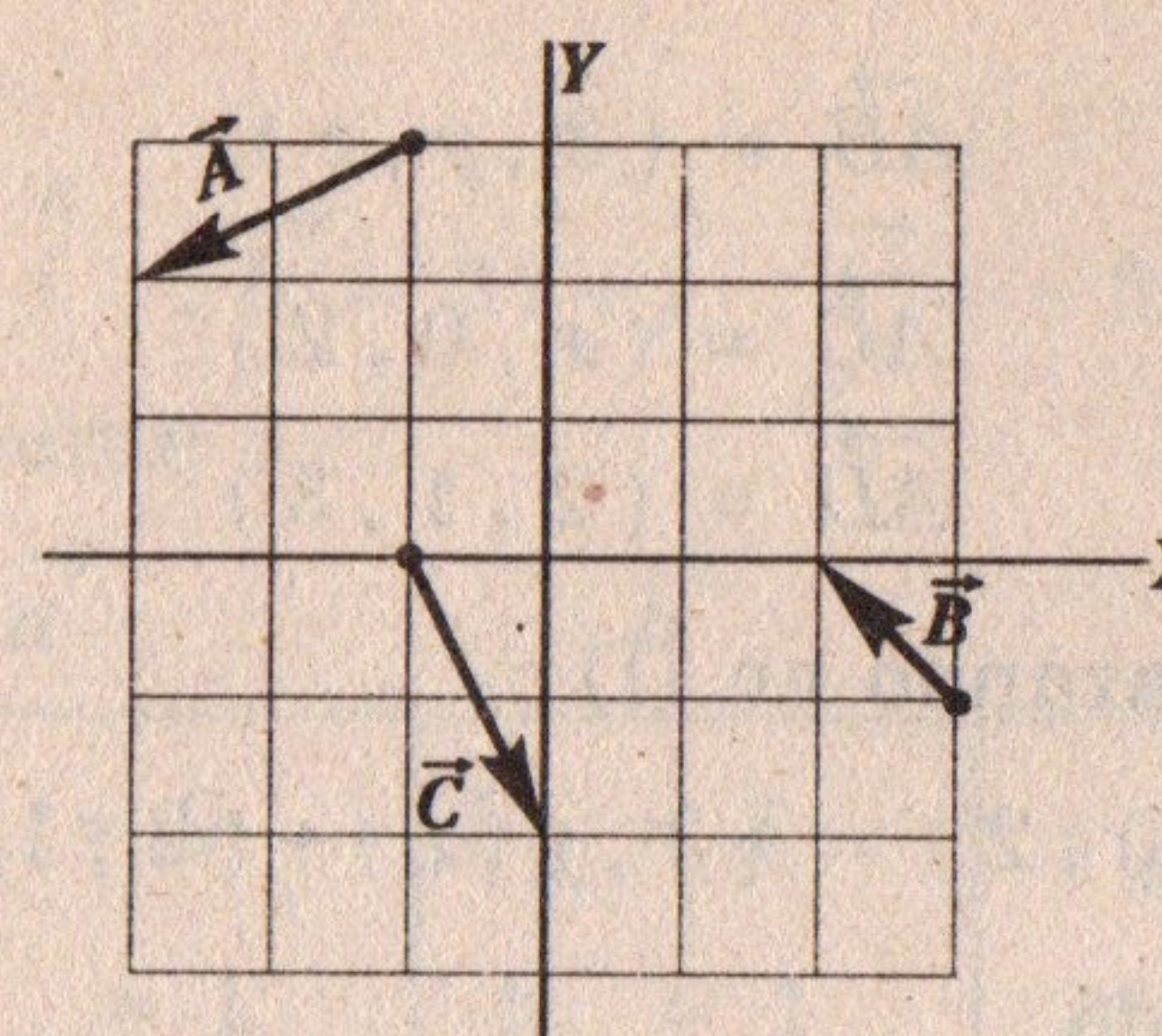
**Nota:**

Este problema admite otra solución, es el vector antiparalelo u opuesto al vector " $\mu$ ".

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, -5) \quad \text{¡¡Resuélvelo!!}$$

**PROBLEMA 75** (Sem. Cepre-Uni 99-I)

Si en la figura mostrada  $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$   
Halle los valores de  $m$  y  $n$ .



$$A) m = 1/3$$

$$n = 1/3$$

$$C) m = 1/3$$

$$n = -4/3$$

$$E) m = 5/3$$

$$n = 1/3$$

$$B) m = 1/3$$

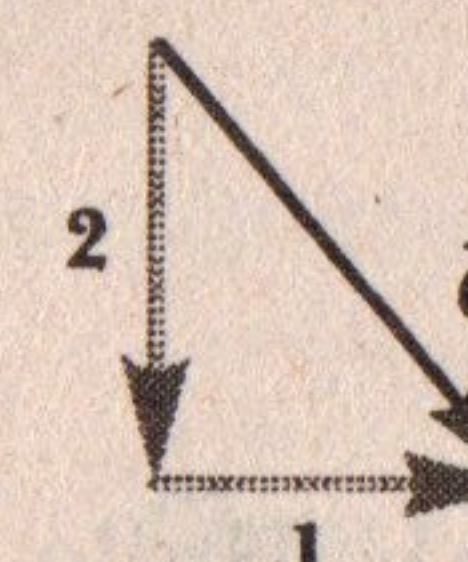
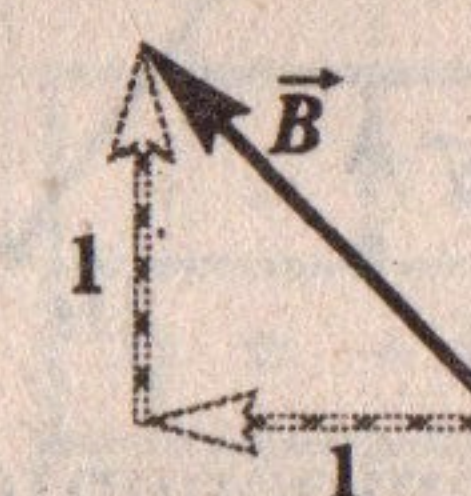
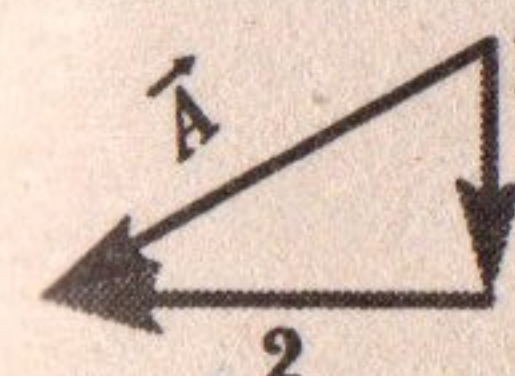
$$n = 2/3$$

$$D) m = 1/3$$

$$n = -5/3$$

**RESOLUCIÓN**

Las componentes cartesianas de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ . Serán :



$$\vec{A} = -\hat{j} - 2\hat{i}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{C} = -2\hat{j} + \hat{i}$$

$$\vec{A} = (-2, -1)$$

$$\vec{B} = (-1, 1)$$

$$\vec{C} = (1, -2)$$

Si :

$$\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$$

$$(1, -2) = m(-2, -1) + n(-1, 1)$$

$$(1, -2) = (-2m, -m) + (-n, n)$$

$$\text{Luego : } -2m - n = 1$$

$$-m + n = -2$$

$$\text{Resolviendo : } \begin{cases} m = 1/3 \\ n = -5/3 \end{cases}$$

Clave: D

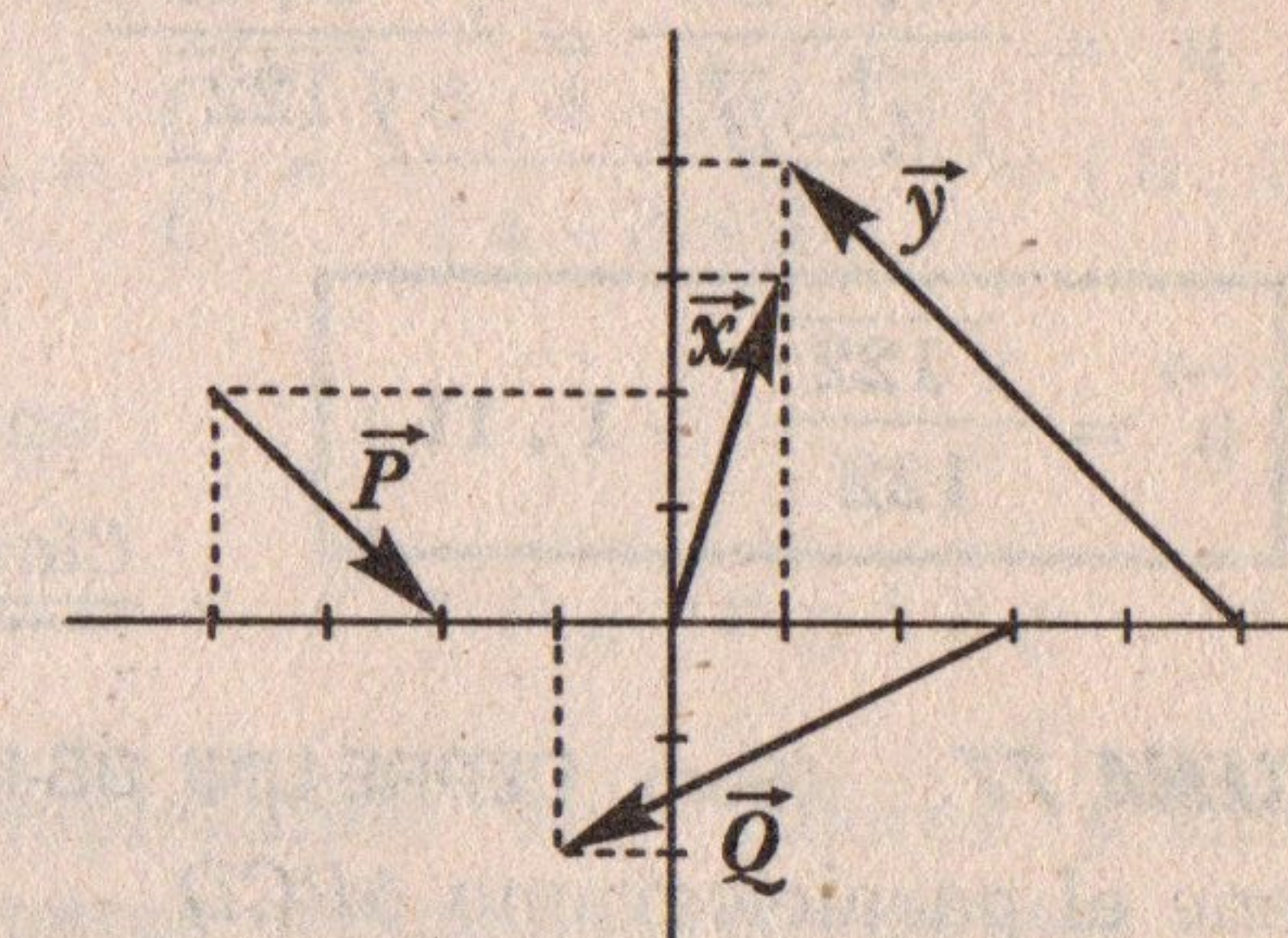
**Nota:**

Problemas similares hemos resuelto por el método gráfico.

**PROBLEMA 76**

Hallar el vector unitario del Vector diferencia  $\vec{A} - \vec{B}$ , si :

$$\vec{A} = \vec{x} + \vec{y} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{P} + \vec{Q}$$



$$A) \frac{(1, 11)}{\sqrt{122}}$$

$$B) \frac{(11, 1)}{\sqrt{122}}$$

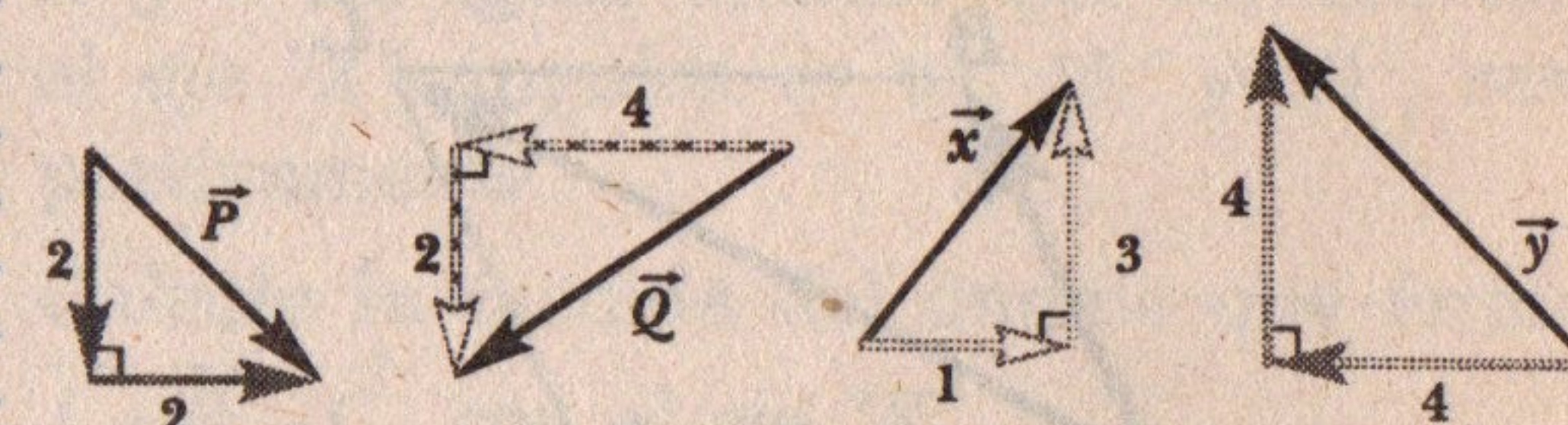
$$C) \frac{\sqrt{122}}{122}(-1, 11)$$

$$D) \frac{(11, -1)}{\sqrt{122}}$$

$$E) \frac{(-1, -11)}{\sqrt{122}}$$

**RESOLUCIÓN**

De modo análogo al problema anterior, las componentes cartesianas de  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  son :



$$\begin{cases} \vec{P} = (2, -2) \\ \vec{Q} = (-4, -2) \end{cases} \quad \vec{B} = \vec{P} + \vec{Q} = (-2, -4) \dots (II)$$